

Examen partiel du 30 avril 2003 (suivi de son corrigé)

1. (6 points) On donne le système différentiel dans \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} x' = -3x + y + 1 \\ y' = 2x - 4y + r(t) \end{cases} \quad \text{où } r(t) \text{ vaut soit } 0, \text{ soit } e^{-t}.$$

a/ Donner la solution générale du système homogène associé.

b/ On suppose $r(t) = 0$. Montrer qu'il existe une solution particulière constante du système complet (i. e. un point fixe du système ; ce point fixe est-il stable ?) et donner la solution générale du système complet, puis l'unique solution de condition initiale $x(0) = 1, y(0) = 2$.

c/ On suppose $r(t) = e^{-t}$. Montrer que le système complet admet une solution particulière de la forme $(x = a + be^{-t}, y = c + de^{-t})$ (N.B. : on doit trouver $a = \frac{2}{5}, b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{5}, d = \frac{1}{2}$) et donner la solution générale du système complet, puis l'unique solution de condition initiale $x(0) = 1, y(0) = 2$.

d/ Que se passe-t-il dans tous les cas pour les trajectoires lorsque $t \rightarrow +\infty$?

2. (6 points) On donne l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 dans \mathbb{R} :

$$y'' + ty' + y = 0$$

Montrer qu'elle admet pour solution particulière $e^{-\frac{t^2}{2}}$. Chercher alors la solution générale sous la forme $y = ze^{-\frac{t^2}{2}}$ et montrer que z' satisfait à une équation linéaire homogène que l'on intégrera ; on en déduira la solution générale z en fonction de $\int_0^t e^{\frac{u^2}{2}} du$, et enfin la solution générale de l'équation en y . Quelle est l'unique solution de condition initiale $y(0) = -1, y'(0) = 1$?

3. (6 points) On donne l'équation différentielle dans \mathbb{R} :

$$y' = -y^2 + a(t)y + b(t)$$

Déterminer $a(t)$ et $b(t)$ dans cette équation de Riccati pour que $-t$ et $\frac{1}{t}$ en soient des solutions particulières. Résoudre alors cette équation. Indications : on posera $z = y + t$ et on montrera que cette

équation en y devient $z' = -z^2 + \frac{t^3 + 3t}{t^2 + 1}z$, équation de Bernoulli, qui devient à son tour, en posant $u = \frac{1}{z}$, l'équation linéaire : $u' = 1 - \frac{t^3 + 3t}{t^2 + 1}u$: on résoudra alors cette équation en u par variation de

la constante, en remarquant que $(te^{\frac{t^2}{2}})' = (1 + t^2)e^{\frac{t^2}{2}}$; on en déduira z , puis y . N.B. : on doit trouver

$y = \frac{1 - \lambda te^{-\frac{t^2}{2}}}{t + \lambda e^{-\frac{t^2}{2}}}$. Déterminer l'unique solution de condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$. Vérifier que $\frac{1}{t}$ et $-t$ sont bien des solutions particulières, correspondant respectivement à $\lambda = 0$ et à $\lambda \rightarrow +\infty$.

T. S. V. P.

4. (6 points) On donne le système différentiel dans \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} x' = -tx - y + te^{-t} \\ y' = -x - ty + te^{-t} \end{cases}$$

a/ Montrer que $(x = e^{-t}, y = e^{-t})$ en est une solution particulière.

b/ Montrer que le système homogène associé a pour solution générale :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{\int_0^t \begin{bmatrix} -u & -1 \\ -1 & -u \end{bmatrix} du} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = e^{-\frac{t^2}{2}I - tJ} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = R(t) \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$, et $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer cette exponentielle de matrice

(N.B. : I commutant avec toute matrice, $e^{-\frac{t^2}{2}I - tJ} = e^{-\frac{t^2}{2}I} \cdot e^{-tJ}$) et montrer qu'elle peut s'écrire :

$$R(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \begin{bmatrix} \text{cht} & -\text{sht} \\ -\text{sht} & \text{cht} \end{bmatrix}$$

c/ En déduire la solution générale du système homogène, puis celle du système complet. Quel est le comportement à l'infini (i. e. pour $t \rightarrow +\infty$ et pour $t \rightarrow -\infty$) des trajectoires solutions? (N.B. pour $t \rightarrow -\infty$, chercher une asymptote)

d/ Déterminer l'unique solution de condition initiale $(x(0) = 2, y(0) = 4)$.

Corrigé de l'examen partiel du 30 avril 2003

1. a/ Le système homogène : $\begin{cases} x' = -3x + y \\ y' = 2x - 4y \end{cases}$ a pour solution générale $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{tA} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$.

Calculons cette exponentielle de matrice :

$|A - \lambda I| = (3 + \lambda)(4 + \lambda) - 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 5)$: il y a 2 valeurs propres, -2 et -5 .

$\text{Ker}(A + 2I) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\text{Ker}(A + 5I) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, d'où : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ et

$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2e^{-2t} + e^{-5t} & e^{-2t} - e^{-5t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-5t} & e^{-2t} + 2e^{-5t} \end{bmatrix}$, d'où la solution

générale du système homogène :

$$\begin{cases} x = \frac{\alpha}{3}(2e^{-2t} + e^{-5t}) + \frac{\beta}{3}(e^{-2t} - e^{-5t}) = \frac{2\alpha + \beta}{3}e^{-2t} + \frac{\alpha - \beta}{3}e^{-5t} = \lambda e^{-2t} + \mu e^{-5t} \\ y = \frac{\alpha}{3}(2e^{-2t} - 2e^{-5t}) + \frac{\beta}{3}(e^{-2t} + 2e^{-5t}) = \frac{2\alpha + \beta}{3}e^{-2t} - 2\frac{\alpha - \beta}{3}e^{-5t} = \lambda e^{-2t} - 2\mu e^{-5t} \end{cases}$$

en posant $\lambda = \frac{2\alpha + \beta}{3}$ et $\mu = \frac{\alpha - \beta}{3}$.

b/ Si $r(t) = 0$, le système complet est $\begin{cases} x' = -3x + y + 1 \\ y' = 2x - 4y \end{cases}$. On sait qu'il existe alors en

général une solution particulière constante $x = x_0, y = y_0$ qui doit satisfaire à : $\begin{cases} -3x_0 + y_0 + 1 = 0 \\ 2x_0 - 4y_0 = 0 \end{cases}$,

soit $x_0 = \frac{2}{5}, y_0 = \frac{1}{5}$. On en déduit la solution générale du système complet :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} + \lambda e^{-2t} + \mu e^{-5t} \\ y = \frac{1}{5} + \lambda e^{-2t} - 2\mu e^{-5t} \end{cases}$$

Le point fixe $(x_0 = \frac{2}{5}, y_0 = \frac{1}{5})$ est un nœud stable car les valeurs propres du système : -2 et -5 sont strictement négatives.

La solution du système complet de conditions initiales $x(0) = 1, y(0) = 2$ est déterminée par le

système linéaire : $\begin{cases} \frac{2}{5} + \lambda + \mu = 1 \\ \frac{1}{5} + \lambda - 2\mu = 2 \end{cases}$, d'où $\lambda = 1, \mu = -\frac{2}{5}$, soit : $\begin{cases} x = \frac{2}{5} + e^{-2t} - \frac{2}{5}e^{-5t} \\ y = \frac{1}{5} + e^{-2t} + \frac{4}{5}e^{-5t} \end{cases}$

c/ Si $r(t) = e^{-t}$, le système complet est un cas particulier de système de la forme :

$$X' = AX + e^{\lambda t} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + e^{\mu t} \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}, \text{ où ni } \lambda \text{ ni } \mu \text{ ne sont valeurs propres de } A, \text{ avec ici } \lambda = 0 \text{ et } \mu = -1.$$

Montrons qu'il est alors légitime de chercher une solution particulière de la forme $e^{\lambda t} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + e^{\mu t} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$:

Tout d'abord, il est immédiat de voir que si Y_1 est solution de $X' = AX + e^{\lambda t} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ et Y_2 est solution de $X' = AX + e^{\mu t} \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$, alors $Y = Y_1 + Y_2$ est solution de $X' = AX + e^{\lambda t} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + e^{\mu t} \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$.

D'autre part, si λ n'est pas valeur propre de A , alors l'équation $X' = AX + e^{\lambda t} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ admet une

solution particulière $Y = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ car $Y' - AY = \lambda e^{\lambda t} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} - Ae^{\lambda t} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = e^{\lambda t}(\lambda I - A) \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ doit

être égal au second membre $e^{\lambda t} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, d'où l'équation aux inconnues a et c : $(\lambda I - A) \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

qui admet, puisque λ n'est pas valeur propre de A , la solution unique $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = (\lambda I - A)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ (Noter qu'il existe un résultat analogue plus général, lorsque α et β sont remplacés par des polynômes en t , et que λ est autorisée à être valeur propre de A .)

Les calculs d'identification de a, b, c, d pour trouver une solution $x = a + be^{-t}$, $y = c + de^{-t}$ conduisent au système : $\begin{cases} -be^{-t} = -3a - 3be^{-t} + c + de^{-t} + 1 \\ -de^{-t} = 2a + 2be^{-t} - 4c - 4de^{-t} + e^{-t} \end{cases}$ d'où (en faisant $t \rightarrow +\infty$) :

$$\begin{cases} -3a + c + 1 = 0 \\ 2a - 4c = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} -b = -3b + d \\ -d = 2b - 4d + 1 \end{cases}, \text{ d'où } a = \frac{2}{5}, c = \frac{1}{5}, b = \frac{1}{4}, d = \frac{1}{2}, \text{ ce qui}$$

donne la solution particulière $x = \frac{2}{5} + \frac{1}{4}e^{-t}$, $y = \frac{1}{5} + \frac{1}{2}e^{-t}$, et la solution générale du système complet :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} + \frac{1}{4}e^{-t} + \lambda e^{-2t} + \mu e^{-5t} \\ y = \frac{1}{5} + \frac{1}{2}e^{-t} + \lambda e^{-2t} - 2\mu e^{-5t} \end{cases}$$

La solution du système complet de conditions initiales $x(0) = 1, y(0) = 2$ est déterminée par le

$$\text{système linéaire : } \begin{cases} \frac{2}{5} + \frac{1}{4} + \lambda + \mu = 1 \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \lambda - 2\mu = 2 \end{cases} \text{ d'où : } \lambda = \frac{2}{3}, \mu = -\frac{19}{60}, \text{ soit :}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{19}{60}e^{-5t} \\ y = \frac{1}{5} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{19}{30}e^{-5t} \end{cases}$$

d/ On voit sur l'expression de la solution générale que dans tous les cas $(r(t) = 0 \text{ ou } r(t) = e^{-t})$, $(x(t), y(t)) \rightarrow \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Dans le cas $r(t) = e^{-t}$, il n'y a pas de point fixe ; mais

dans le cas $r(t) = 0$, le point $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ est à la fois point fixe et point limite (pour $t \rightarrow +\infty$) de toute trajectoire du système.

2. On a : $\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)' = -te^{-\frac{t^2}{2}}$ et $\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)'' = (-1 + t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$, d'où :

$\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)'' + t\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)' + e^{-\frac{t^2}{2}} = (-1 + t^2 - t^2 + 1)e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$, donc $e^{-\frac{t^2}{2}}$ est bien solution particulière de l'équation $y'' + ty' + y = 0$. Cherchons donc comme indiqué dans le texte la solution générale sous la forme $y = ze^{-\frac{t^2}{2}}$ (N.B. : comme cette équation est homogène, il est clair que tout multiple de $e^{-\frac{t^2}{2}}$ par une constante sera aussi solution ; mais qu'en est-il si le facteur z n'est plus constant ? ...) : $y' = z'e^{-\frac{t^2}{2}} - tze^{-\frac{t^2}{2}}$ (d'où $ty' = tz'e^{-\frac{t^2}{2}} - t^2ze^{-\frac{t^2}{2}}$) et $y'' = z''e^{-\frac{t^2}{2}} - 2tz'e^{-\frac{t^2}{2}} + z(-1 + t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$, d'où enfin : $y'' + ty' + y = [z'' - tz' + z(-1 + t^2 - t^2 + 1)]e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$. La dérivée z' de z est donc solution de l'équation linéaire en Z : $Z' - tZ = 0$, soit $\frac{Z'}{Z} = t$, qui s'intègre en $\ln \frac{Z}{\lambda} = \frac{t^2}{2}$, i.e. $Z = z' = \lambda e^{\frac{t^2}{2}}$, qui s'intègre à son tour en $z = \lambda \int_0^t e^{\frac{u^2}{2}} du + \mu$, d'où $y = ze^{-\frac{t^2}{2}} = \lambda e^{-\frac{t^2}{2}} \int_0^t e^{\frac{u^2}{2}} du + \mu e^{-\frac{t^2}{2}}$ (solution générale de l'équation).

Si y satisfait aux conditions initiales $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$: $y(0) = -1 = 0 + \mu$, d'où $\mu = -1$, et comme $y' = \lambda e^{-\frac{t^2}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} - \lambda t e^{-\frac{t^2}{2}} \int_0^t e^{\frac{u^2}{2}} du - t \mu e^{-\frac{t^2}{2}}$, $y'(0) = 1 = \lambda + 0$, d'où $\lambda = 1$, soit $y = e^{-\frac{t^2}{2}} \int_0^t e^{\frac{u^2}{2}} du - e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}} \left[\int_0^t e^{\frac{u^2}{2}} du - 1 \right]$

3. Pour que $-t$ et $\frac{1}{t}$ soient solutions particulières, on doit avoir :
$$\begin{cases} -1 & = -t^2 - ta(t) + b(t) \\ -\frac{1}{t^2} & = -\frac{1}{t^2} + \frac{a(t)}{t} + b(t) \end{cases}$$
,

d'où $b(t) = -\frac{a(t)}{t}$ et $a(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$, $b(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}$. L'équation de Riccati proposée est donc :

$y' = -y^2 + \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}y + \frac{t^2-1}{t^2+1}$; elle est satisfaite par $-t$:

$(-t)' = -(-t)^2 + \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}(-t) + \frac{t^2-1}{t^2+1}$, d'où, si $z = y + t$, en soustrayant membre à membre :

$z' = (y+t)' = t^2 - y^2 + (y+y)\frac{t(1-t^2)}{1+t^2} = -(y+t)(y+t-2t) + (y+t)\frac{t(1-t^2)}{1+t^2} = -z^2 + 2tz + \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}z$, soit $z' = -z^2 + \frac{t^3+3t}{1+t^2}z$, équation de Bernoulli, qui se transforme en

divisant par z^2 et en posant $u = \frac{1}{z}$ en l'équation linéaire : $u' = 1 - \frac{t^3+3t}{1+t^2}u$. La solution de l'équation

homogène $\frac{u'}{u} = -t - \frac{2t}{1+t^2}$ est : $\ln \frac{u}{\mu} = -\frac{t^2}{2} - \ln(1+t^2)$, i.e. $u = \mu \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1+t^2}$; en faisant varier

la constante μ : $u' = \mu' \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1+t^2} + \mu \frac{-t^3-3t}{(1+t^2)^2} e^{-\frac{t^2}{2}}$ et $u' + \frac{t^3+3t}{1+t^2}u = 1$ devient $\mu' \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{1+t^2} = 1$, soit

$\mu' = (1+t^2)e^{\frac{t^2}{2}} = (te^{\frac{t^2}{2}})'$, d'où $\mu = te^{\frac{t^2}{2}} + \lambda$, et $u = \frac{te^{\frac{t^2}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}} + \lambda e^{-\frac{t^2}{2}}}{1+t^2}$, soit $z = \frac{1}{u} = \frac{1+t^2}{t + \lambda e^{-\frac{t^2}{2}}}$ et

finalement $y = z - t = \frac{1 - \lambda t e^{-\frac{t^2}{2}}}{t + \lambda e^{-\frac{t^2}{2}}}$.

Si $y(0) = \frac{1}{2}$, $\lambda = 2$, i.e. $y = \frac{1 - 2te^{-\frac{t^2}{2}}}{t + 2e^{-\frac{t^2}{2}}}$. On vérifie enfin que pour $\lambda = 0$, on retrouve la solution

particulière $y = \frac{1}{t}$ et que pour $\lambda \rightarrow +\infty$, on retrouve la solution $y = -t$.

4. a/ On vérifie immédiatement que $(e^{-t})' = -e^{-t} = -te^{-t} - e^{-t} + te^{-t}$ et, de même, que $(e^{-t})' = -e^{-t} = -e^{-t} - te^{-t} + te^{-t}$, donc que $(x, y) = (e^{-t}, e^{-t})$ est bien une solution particulière du système. Reste à trouver la solution générale du système homogène associé.

b/ Le système homogène associé est : $\vec{X}' = \begin{bmatrix} -t & -1 \\ -1 & -t \end{bmatrix} \vec{X}$. On admettra ici (voir par exemple le chap. VII, §4, du livre de Christol-Cot-Marle : "Calcul différentiel", Ellipses, Paris, 1997) que

lorsque $\forall s, \forall t, A(s)A(t) = A(t)A(s)$, alors l'application $t \mapsto R(t) = e^{\int_0^t A(u)du}$ a pour dérivée

$t \mapsto A(t)e^{\int_0^t A(u)du}$ et que l'application R est donc la *résolvante* de l'équation $\vec{X}' = A(t)\vec{X}$, i.e. l'application qui est telle que la solution générale de cette équation est $\vec{X}(t) = R(t)\vec{X}_0$ (NB : ce n'est pas vrai en général si $A(s)$ et $A(t)$ ne commutent pas ; on s'est limité dans le cours à ce cas simple). Vérifions donc ici que $A(s) = \begin{bmatrix} -s & -1 \\ -1 & -s \end{bmatrix}$ et $A(t) = \begin{bmatrix} -t & -1 \\ -1 & -t \end{bmatrix}$ commutent : $A(s)A(t) =$

$\begin{bmatrix} st + 1 & s + t \\ s + t & st + 1 \end{bmatrix}$, expression manifestement symétrique en s et t , donc $A(s)$ et $A(t)$ commutent. Calculons donc cette résolvante, i.e. calculons l'exponentielle de la matrice $\int_0^t \begin{bmatrix} -u & -1 \\ -1 & -u \end{bmatrix} du =$

$\begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2} & -t \\ -t & -\frac{t^2}{2} \end{bmatrix} = -\frac{t^2}{2}I - tJ$, si $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Comme I commute avec toute matrice (2,2), $-\frac{t^2}{2}I$ commute avec $-tJ$, et $R(t) = e^{-\frac{t^2}{2}I - tJ} = e^{-\frac{t^2}{2}I} \cdot e^{-tJ} = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{-tJ}$ (on rappelle que a/ dès que $AB = BA$, $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ et que b/ $e^{\lambda I} = e^\lambda \cdot I$). Il reste donc à calculer e^{-tJ} , ce qui peut se faire soit directement par développement en série, soit par diagonalisation de J . Choisissons la première méthode : comme $J^2 = I$, $\forall k, J^{2k} = I$ et $\forall k, J^{2k+1} = J$; donc :

$e^{-tJ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} J^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^{2k}}{(2k)!} J^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^{2k+1}}{(2k+1)!} J^{2k+1} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \right] I - \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] J =$

$\text{cht}I - \text{sht}J = \begin{bmatrix} \text{cht} & -\text{sht} \\ -\text{sht} & \text{cht} \end{bmatrix}$, et $R(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \begin{bmatrix} \text{cht} & -\text{sht} \\ -\text{sht} & \text{cht} \end{bmatrix}$.

c/ Il en résulte que la solution générale du système homogène est :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{-\frac{t^2}{2}} \begin{bmatrix} \text{cht} & -\text{sht} \\ -\text{sht} & \text{cht} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{t^2}{2}}(\alpha \text{cht} - \beta \text{sht}) \\ e^{-\frac{t^2}{2}}(\beta \text{cht} - \alpha \text{sht}) \end{bmatrix}$$

et la solution générale du système complet est :

$$\begin{cases} x &= e^{-t} + e^{-\frac{t^2}{2}}(\alpha \text{cht} - \beta \text{sht}) \\ y &= e^{-t} + e^{-\frac{t^2}{2}}(\beta \text{cht} - \alpha \text{sht}) \end{cases}$$

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, toutes les trajectoires convergent vers l'origine ; et lorsque $t \rightarrow -\infty$, x et y , équivalents à e^{-t} , vont en $+\infty$, avec $\frac{y}{x} \rightarrow 1$ et $y - x = e^{-\frac{t^2}{2}}(-\alpha e^t - \beta e^{-t}) \rightarrow 0$, donc la première bissectrice est asymptote aux trajectoires pour $t \rightarrow -\infty$.

d/ Les conditions initiales $x(0) = 2$ et $y(0) = 4$ donnent $\alpha = 1$ et $\beta = 3$, soit :

$x = e^{-t} + e^{-\frac{t^2}{2}}(\text{cht} - 3\text{sht})$ et $y = e^{-t} + e^{-\frac{t^2}{2}}(3\text{cht} - \text{sht})$.