**UNIVERSITÉ PARIS VIII** **SYSTÈMES DYNAMIQUES**
**Licence / maîtrise de mathématiques** **2002-2003**
**Maîtrise d'informatique, option mathématiques**

## Examen final du 2 juillet 2003 (suivi de son corrigé)

**1. (6 points)** On donne le système différentiel dans $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{cases} x' &= -x \\ y' &= -y + x^2 \\ z' &= \quad z + x^2 \end{cases}$$

a/ Déterminer l'unique point fixe de ce système dynamique et donner sa nature. Quelles sont les sous-espaces stable et instable du système linéarisé tangent ?

b/ Intégrer ce système (en commençant par la première équation et en reportant la solution trouvée dans les deux autres) et donner l'expression de son flot $\Phi_t$, i.e. donner $x, y, z$ en fonction des conditions initiales $x_0, y_0, z_0$.

c/ Montrer que lorsque $t \longrightarrow +\infty$, $(x, y, z) \longrightarrow (0, 0, 0)$ si et seulement si $z_0 = -\dfrac{1}{3}x_0^2$ ; montrer que de plus si $z_0 = -\dfrac{1}{3}x_0^2$, on a aussi $z = -\dfrac{1}{3}x^2$, si $(x, y, z) = \Phi_t(x_0, y_0, z_0)$, autrement dit que le cylindre $(C)$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $Z = -\dfrac{1}{3}X^2$ est invariant par le flot.

d/ Montrer de même que lorsque $t \longrightarrow -\infty$, $(x, y, z) \longrightarrow (0, 0, 0)$ si et seulement si $x_0 = 0$ et $y_0 = -x_0^2$ ; montrer que de plus si $x_0 = 0$ et $y_0 = -x_0^2$, on a aussi $x = 0$ et $y = -x^2$, autrement dit que l'axe $0z$, d'équation $x = 0,\ y = 0$ dans $\mathbb{R}^3$, est invariant par le flot.

e/ Déduire de ce qui précède que le cylindre $(C)$ et l'axe $Oz$ sont les sous-variétés respectivement stable et instable du système en $(0, 0, 0)$.

**2. (6 points)** On donne le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{cases} x' &= x(2 - x - y) \\ y' &= y(-3 + 4x - x^2) \end{cases}$$

Déterminer les points fixes du système et donner leur nature. Sur un graphique, tracer les nullclines et les points fixes avec leurs directions stable(s) et instable(s) quand elles existent. Préciser *dans le premier quadrant uniquement* la direction du vecteur tangent aux trajectoires ($x' > 0, y' < 0$, etc.) et le représenter sur le graphique. Quel est le sens de parcours (en temps positif) sur les trajectoires qui s'enroulent autour de l'unique foyer situé dans le premier quadrant ?

**3. (6 points)** On donne l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$ :

$$\overrightarrow{x}' = A\overrightarrow{x} - ||\overrightarrow{x}||^2\, \overrightarrow{x}$$

où $A$ admet deux valeurs propres complexes conjuguées $\alpha \pm i\omega$, avec $\omega \neq 0$ (on rappelle que $\mathbb{R}^2$ admet alors toujours une base orthonormée dans laquelle l'endomorphisme qui a pour matrice $A$ dans la base canonique s'écrit $\begin{bmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{bmatrix}$ : on pourra se placer d'emblée dans une telle base).

a/ Calculer le produit scalaire $< \overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x} >= {}^t\overrightarrow{x}A\overrightarrow{x}$ dans une telle base. Montrer que $\overrightarrow{0}$ est le seul point fixe du système.

b/ Montrer que si $\alpha \leq 0$, alors $V(\overrightarrow{x}) = ||\overrightarrow{x}||^2$ est une fonction de Lyapounov stricte dans $\mathbb{R}^2$ pour le point fixe $\overrightarrow{0}$ du système, qui est donc globalement et asymptotiquement stable.

c/ Montrer que si $\alpha > 0$, alors d'une part le point fixe $\overrightarrow{0}$ est instable, d'autre part la couronne

(C)=$\{\overrightarrow{x}, \sqrt{\alpha}-\varepsilon \leq ||\overrightarrow{x}|| \leq \sqrt{\alpha}+\varepsilon\}$, où $\varepsilon$ est assez petit, par exemple $\varepsilon \leq \frac{\alpha}{2}$, est une région de confinement pour le flot. On calculera pour cela le produit scalaire du vecteur tangent aux trajectoires avec le vecteur unitaire sortant de (C), $\frac{\overrightarrow{x}}{||\overrightarrow{x}||}$ pour $||\overrightarrow{x}|| = \sqrt{\alpha}+\varepsilon$, et $-\frac{\overrightarrow{x}}{||\overrightarrow{x}||}$ pour $||\overrightarrow{x}|| = \sqrt{\alpha}-\varepsilon$. En déduire, à l'aide du théorème de Poincaré-Bendixson, que le système admet alors au moins une orbite fermée. Montrer, en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0 dans le raisonnement précédent, que le cercle $C(\overrightarrow{0}, \sqrt{\alpha})$ est une telle orbite fermée. Qu'est-ce qui détermine le sens de parcours sur cette trajectoire ?
d/ Montrer par l'absurde que le système n'admet aucune autre orbite fermée : s'il en existait une autre, comme les trajectoires ne se rencontrent pas, elle serait soit entièrement dans $||\overrightarrow{x}|| > \sqrt{\alpha}$, soit entièrement dans $||\overrightarrow{x}|| < \sqrt{\alpha}$ ; en intégrant sur une période $T$ d'une telle orbite fermée la fonction $< \overrightarrow{\nabla V}, \overrightarrow{x}' >$, où $V(\overrightarrow{x}) = ||\overrightarrow{x}||^2$, obtenir une contradiction.
e/ Retrouver ces résultats en exprimant le système en coordonnés cartésiennes et en passant en coordonnées polaires.

**4. (6 points)** On donne le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$ :
$$\begin{cases} x' = -y + x(x^2+y^2-\frac{1}{2})(1-x^2-y^2) \\ y' = x + y(x^2+y^2-\frac{1}{2})(1-x^2-y^2) \end{cases}$$
a/ Montrer que ce système équivaut en coordonnées polaires au système
$$r' = r\left(r^2-\frac{1}{2}\right)(1-r^2), \;\; \theta' = 1$$
Que se passe-t-il si $r_0 = 0,\ 1$ ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ? On supposera ces cas exclus dans la suite.
b/ En posant $y = r^2$, montrer que ce système se transforme en $\frac{y'}{y\left(y-\frac{1}{2}\right)(1-y)} = 2,\ \theta' = 1$. En utilisant la décomposition en éléments simples $\frac{1}{y\left(y-\frac{1}{2}\right)(1-y)} = \frac{4}{y-\frac{1}{2}} - \frac{2}{y} + \frac{2}{1-y}$ montrer que cette équation s'intègre en $\lambda\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{y(1-y)} = e^t$, avec $\lambda = \frac{y_0(1-y_0)}{\left(y_0-\frac{1}{2}\right)^2}$, i.e. $\frac{\left(r^2-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}-\left(r^2-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{e^t}{\lambda}$.
c/ Montrer que : (i) si $0 < y_0 < \frac{1}{2}$, alors $\forall t, 0 < y < \frac{1}{2}$ ; (ii) si $\frac{1}{2} < y_0 < 1$, alors $\forall t, \frac{1}{2} < y < 1$ ; (iii) si $y_0 > 1$, alors $\forall t, y > 1$. Étudier pour cela le signe de $\lambda$ en fonction de $y_0$ ; pour distinguer entre les cas (i) et (ii), on pourra utiliser la relation $y' = 2y\left(y-\frac{1}{2}\right)(1-y)$ pour étudier dans chaque cas les variations de $y$ et de $1-y$.)
d/ En déduire dans tous les cas l'expression en coordonnées polaires du flot et étudier le comportement à l'infini des trajectoires (il y a un point fixe stable, un cycle limite instable et un cycle limite stable : faire un dessin illustrant ces résultats).

## Corrigé de l'examen final du 2 juillet 2003

**1.** a/ $\overrightarrow{0}$ est évidemment l'unique point fixe du système. Le système linéarisé tangent est $\left\{\begin{array}{rcr} x' & = & -x \\ y' & = & -y \\ z' & = & z \end{array}\right.$ qui a en $\overrightarrow{0}$ un point fixe hyperbolique (aucune des valeurs propres, $-1$ et $1$, n'étant nulle), et donc d'après le théorème de Hartman-Grobman, le système non linéaire admet en $\overrightarrow{0}$ un point selle pour point fixe, comme son linéarisé tangent, dont les sous-espaces stable et instable sont, respectivement et tous calculs faits : $E_s = \{z = 0\}$ (plan $xOy$) et $E_u = \{x = 0,\ y = 0\}$ (axe $0z$).

b/ On a d'abord $x = x_0 e^{-t}$, d'où $y' = -y + x_0^2 e^{-2t}$ et $z' = z + x_0^2 e^{-2t}$. Par variation de la constante, on obtient :
$y = (y_0 + x_0^2)e^{-t} - x_0^2 e^{-2t}$ et $z = \left(z_0 + \dfrac{x_0^2}{3}\right) e^t - \dfrac{x_0^2}{3} e^{-2t}$, autrement dit :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \Phi_t\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_0 e^{-t} \\ (y_0 + x_0^2)e^{-t} - x_0^2 e^{-2t} \\ \left(z_0 + \dfrac{x_0^2}{3}\right) e^t - \dfrac{x_0^2}{3} e^{-2t} \end{bmatrix}$$

c/ D'après l'expression du flot, pour $t \longrightarrow +\infty$, $(x, y, z) \longrightarrow (0, 0, 0)$ (le point fixe) si et seulement si $z_0 + \dfrac{x_0^2}{3} = 0$ ; de plus on a alors : $z = -\dfrac{x_0^2}{3} e^{-2t} = -\dfrac{x^2}{3}$.
Donc tout point $\overrightarrow{x_0}$ du cylindre $(C)$ d'équation $Z + \dfrac{X^2}{3} = 0$ a pour devenir asymptotique en temps positif le point fixe $\overrightarrow{0}$, son orbite $\{\Phi_t(\overrightarrow{x_0}), t \in \mathbb{R}\}$ restant dans le cylindre $\left\{Z + \dfrac{X^2}{3} = 0\right\}$ : le cylindre $(C)$ $\left\{Z + \dfrac{X^2}{3} = 0\right\}$ est invariant par le flot, en temps positif comme en temps négatif.

d/ De même, pour $t \longrightarrow -\infty$, $(x, y, z) \longrightarrow (0, 0, 0)$ (le point fixe) si et seulement si $x_0 = 0$ et $y_0 + x_0^2 = 0$ ; de plus on a alors : $x = 0$ et $y = 0$.
Donc tout point $\overrightarrow{x_0}$ de l'axe $Oz$ (d'équations $X = 0$ et $Y = 0$) a pour devenir asymptotique en temps négatif le point fixe $\overrightarrow{0}$, son orbite $\{\Phi_t(\overrightarrow{x_0}), t \in \mathbb{R}\}$ restant sur l'axe $Oz$ : l'axe $Oz$ est invariant par le flot, en temps positif comme en temps négatif.

e/ Il résulte de la définition des sous-variétés stable $(S)$ et instable $(U)$ que $(C)$ et $Oz$, respectivement, sont ces sous-variétés. On vérifie aussi que $T_{\overrightarrow{0}} S = E_s = xOy$ (par exemple parce qu'en $(0, 0, 0)$ le cylindre $(C)$ contient les courbes $(x = 0, y = t, z = 0)$ et $(x = t, y = 0, z = -\dfrac{t^2}{3})$, ce qui donne deux vecteurs tangents à $(C)$ en $(0, 0, 0)$ : $(0, 1, 0)$ et $(1, 0, 0)$, vecteurs qui engendrent bien le plan $xOy$), et que $T_{\overrightarrow{0}} U = E_u = Oz$.

**2.** Les points fixes du système dynamique sont les $(x, y)$ qui annulent simultanément $x' = x(2-x-y)$ et $y' = y(1-x)(x-3)$, soit : $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ et $(3, -1)$. La matrice jacobienne du système s'écrit :

$$J_{(x,y)}F = \begin{bmatrix} 2-2x-y & -x \\ 4y-2xy & -3+4x-x^2 \end{bmatrix}$$

- En $(0, 0)$, $J_{(0,0)}F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres $2$ et $-3$. $(0, 0)$ est un point-selle du linéarisé tangent ; comme c'est un point singulier hyperbolique (= aucune valeur propre de partie réelle nulle), c'est donc aussi d'après le théorème de Hartman-Grobman, un point-selle du système non linéaire ; direction stable : $Oy$ ; direction instable : $Ox$.

- En $(2, 0)$, $J_{(2,0)}F = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres $-2$ et $1$. $(0, 0)$ est aussi un point-selle du linéarisé tangent ; comme c'est un point singulier hyperbolique, c'est donc aussi un point-selle du système non linéaire ; direction stable : $Ox$ ; direction instable : $\mathbb{R}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

- En $(1, 1)$, $J_{(1,1)}F = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$. $(1, 1)$ est un foyer stable du linéarisé tangent ; comme c'est un point singulier hyperbolique, c'est donc aussi un foyer stable du système non linéaire.

- En $(3, -1)$, $J_{(3,-1)}F = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ a pour valeurs propres $-\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$. $(3, -1)$ est aussi un foyer stable, du linéarisé tangent comme du système non linéaire.

Les nullclines sont les réunions de droites $x = 0$ et $y = 2 - x$ d'une part (pour $x' = 0$) et $y = 0$, $x = -1$ et $x = 3$ d'autre part (pour $y' = 0$). Dans le premier quadrant $x \geq 0$, $y \geq 0$, on a $x' > 0$ au-dessous de la droite d'équation $y = 2 - x$, et $x' < 0$ au-dessus ; et $y' > 0$ pour $1 < x < 3$, et $y' < 0$ pour $x < 1$ ou $x > 3$. Le tracé des nullclines et de quelques vecteurs du champ au voisinage du point $(1, 1)$, unique foyer situé dans le premier quadrant, ne présente pas de difficulté et montre que le sens de parcours sur les trajectoires spiralant autour du foyer $(1, 1)$ est le sens positif. On montrerait de même que le sens de parcours sur les trajectoires qui s'enroulent autour de l'autre foyer $(3, -1)$ est aussi le sens positif.

**3.** a/ En se plaçant comme indiqué dans une base dans laquelle $A$ s'écrit $\begin{bmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{bmatrix}$, le produit scalaire $< \overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x} >= {}^t\overrightarrow{x}A\overrightarrow{x}$ s'écrit : $[x \quad y] \begin{bmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha(x^2 + y^2) = \alpha\, ||\overrightarrow{x}||^2$

Il est clair que $\overrightarrow{0}$ est un point fixe. S'il en existait un autre, soit $\overrightarrow{x}$ ($\neq \overrightarrow{0}$), on aurait $A\overrightarrow{x} = ||\overrightarrow{x}||^2\, \overrightarrow{x}$, d'où, en prenant le produit scalaire avec $\overrightarrow{x}$ : $\alpha\, ||\overrightarrow{x}||^2 = ||\overrightarrow{x}||^4$, et, puisque $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$, $||\overrightarrow{x}||^2 = \alpha$, d'où en reportant dans l'égalité initiale : $A\overrightarrow{x} = \alpha\overrightarrow{x}$, i.e. $\alpha$ serait alors valeur propre de $A$, d'où $\omega^2 = \det(A - \alpha I) = 0$, ce qui contredirait l'hypothèse $\omega \neq 0$. $\overrightarrow{0}$ est donc bien le seul point fixe.

b/ $V(\overrightarrow{x}) = ||\overrightarrow{x}||^2 > 0$ si $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ et ne vaut $0$ que si $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ ; d'autre part, si $\alpha \leq 0$, $< \overrightarrow{\nabla V}, \overrightarrow{x'} >= 2 < \overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x} - ||\overrightarrow{x}||^2\, \overrightarrow{x} >= 2\left(\alpha\, ||\overrightarrow{x}||^2 - ||\overrightarrow{x}||^4\right) = 2\, ||\overrightarrow{x}||^2 \left(\alpha - ||\overrightarrow{x}||^2\right) < 0$ sauf si $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. $V$ est donc pour le point fixe $\overrightarrow{0}$ une fonction de Lyapounov stricte sur $\mathbb{R}^2$ tout entier si $\alpha \leq 0$. Il en résulte que, pour $\alpha \leq 0$, le point fixe $\overrightarrow{0}$ est globalement et asymptotiquement stable.

c/ Si $\alpha > 0$, les deux valeurs propres du linéarisé tangent en $\overrightarrow{0}$, $\alpha + \pm i\omega$, sont de partie réelle strictement positive, donc le point fixe $\overrightarrow{0}$ est instable. Montrons que sur les bords de la couronne (C) $\left\{\sqrt{\alpha} - \varepsilon \leq ||\overrightarrow{x}|| \leq \sqrt{\alpha} + \varepsilon\right\}$ le flot est toujours rentrant :

- Si $||\overrightarrow{x}|| = \sqrt{\alpha} + \varepsilon$, le produit scalaire du vecteur tangent avec le vecteur normal unitaire sortant est : $< \overrightarrow{x}', \dfrac{\overrightarrow{x}}{||\overrightarrow{x}||} >= \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}+\varepsilon}\left(< A\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} > - ||\overrightarrow{x}||^4\right) = \left(\sqrt{\alpha}+\varepsilon\right)\left[\alpha - (\sqrt{\alpha}+\varepsilon)^2\right] = -\,\varepsilon(2\sqrt{\alpha}+\varepsilon)\left(\sqrt{\alpha}+\varepsilon\right) < 0$, donc l'angle entre les deux vecteurs est obtus et le champ est bien rentrant sur le bord extérieur de la couronne (C).

- Si $||\overrightarrow{x}|| = \sqrt{\alpha} - \varepsilon$, le produit scalaire du vecteur tangent avec le vecteur normal unitaire sortant est : $< \overrightarrow{x}', -\dfrac{\overrightarrow{x}}{||\overrightarrow{x}||} >= \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}-\varepsilon}\left(- < A\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} > + ||\overrightarrow{x}||^4\right) = \left(\sqrt{\alpha}-\varepsilon\right)\left[-\alpha + (\sqrt{\alpha}-\varepsilon)^2\right] =$ $\varepsilon\left(\sqrt{\alpha}-\varepsilon\right)(-2\sqrt{\alpha}+\varepsilon) < 0$ pour $\varepsilon$ assez petit, donc l'angle entre les deux vecteurs est obtus et le champ est bien rentrant sur le bord intérieur de la couronne (C) aussi.

Et comme la couronne (C) ne contient pas de point singulier, il résulte du théorème de Poincaré-Bendixson que (C) contient une orbite fermée. Ce raisonnement étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, c'est donc que le cercle $\mathcal{C}(\overrightarrow{0}, \sqrt{\alpha})$ est une telle orbite fermée.
Le sens de parcours sur le cercle $\mathcal{C}(\overrightarrow{0}, \sqrt{\alpha})$ est déterminé par le signe de $\omega$. En effet :
$\overrightarrow{x}' = \begin{bmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{bmatrix} \overrightarrow{x} - ||\overrightarrow{x}||^2\,\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{bmatrix} \overrightarrow{x} - \alpha\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \overrightarrow{x} = \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \overrightarrow{x}$. Or le vecteur $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \overrightarrow{x}$ est le vecteur déduit du vecteur normal sortant $\overrightarrow{x}$ par la rotation d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ : donc $\overrightarrow{x}'$ oriente le cercle dans le sens positif si $\omega > 0$ et dans le sens négatif si $\omega < 0$.

d/ Si le système admettait une autre orbite fermée, soit $\left\{\overrightarrow{x(t)}, t \in [0,T]\right\}$, avec $\overrightarrow{x(T)} = \overrightarrow{x(0)}$, on aurait $0 = V\left(\overrightarrow{x(T)}\right) - V\left(\overrightarrow{x(0)}\right) = \displaystyle\int_0^T < \overrightarrow{\nabla V}, \overrightarrow{x}' > dt = \int_0^T 2\,||\overrightarrow{x}||^2\left(\alpha - ||\overrightarrow{x}||^2\right) dt$ ; mais l'intégrande est soit strictement positif (si $||\overrightarrow{x}|| < \sqrt{\alpha}$), soit strictement négatif (si $||\overrightarrow{x}|| > \sqrt{\alpha}$), et l'intégrale ne peut en aucun cas être nulle, contradiction : donc le système dynamique n'admet aucune autre orbite périodique (= fermée).

e/ En coordonnées cartésiennes, le système s'écrit :
$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - (x^2+y^2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x - \omega y - (x^2+y^2)x \\ \omega x + \alpha y - (x^2+y^2)y \end{bmatrix}$ d'où :

- $xx' + yy' = x(\alpha x - \omega y) - x^2(x^2+y^2) + y(\omega x + \alpha y) - (x^2+y^2)y^2 = \left[\alpha - (x^2+y^2)\right](x^2+y^2)$

  soit : $rr' = (\alpha - r^2)r^2$, soit encore : $\dfrac{-2r'}{r^3} = 2\left(1 - \dfrac{\alpha}{r^2}\right)$

- $\dfrac{xy' - x'y}{x^2} = \dfrac{x(\omega x + \alpha y) - (x^2+y^2)xy - y(\alpha x - \omega y) + (x^2+y^2)xy}{x^2} = \omega\left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right)$

  soit : $(1 + \tan^2\theta)\theta' = \omega(1 + \tan^2\theta)$, soit encore : $\theta' = \omega$.

En coordonnées polaires $(r, \theta)$, et en posant $z = \dfrac{1}{r^2}$, le système s'écrit donc : $\left\{\begin{array}{lcl} z' & = & 2(1-\alpha z) \\ \theta' & = & \omega \end{array}\right.$

D'où (en choisissant de repérer l'angle $\theta$ par rapport $\theta_0$, i.e. $\theta_0 = 0$) : $\theta = \omega t$ et d'autre part :

- soit $\alpha = 0$ : $z = z_0 + 2t$, i.e. $r = \dfrac{r_0}{\sqrt{1+2r_0^2 t}}$, qui tend vers $0$ pour $t \longrightarrow +\infty$, l'intervalle maximal d'existence de la solution $r(t)$ étant $\left]\dfrac{1}{2r_0^2}, +\infty\right[$.

- soit $\alpha \neq 0$ et alors $z' = -2\alpha z + 2$ s'intègre (par variation de la constante) en : $z = \dfrac{1}{\alpha} + \left(z_0 - \dfrac{1}{\alpha}\right) e^{-2\alpha t}$, soit : $r = \sqrt{\dfrac{\alpha}{1 + \left(\dfrac{\alpha}{r_0^2} - 1\right) e^{-2\alpha t}}}$
  -lorsque $\alpha < 0$, $r \longrightarrow 0$ pour $t \longrightarrow +\infty$ quel que soit $r_0$ (sauf $0$), l'intervalle maximal d'existence de la solution $r(t)$ étant $\left]-\dfrac{1}{2\alpha}\ln\dfrac{r_0^2}{r_0^2-\alpha}, +\infty\right[$ : $\overrightarrow{0}$ est alors un point fixe attractif.
  -lorsque $\alpha > 0$, $r \longrightarrow \sqrt{\alpha}$ pour $t \longrightarrow +\infty$ quel que soit $r_0$ (sauf $0$) ; et pour $r_0 < \sqrt{\alpha}$, $r \longrightarrow 0$ pour $t \longrightarrow -\infty$ (intervalle maximum d'existence : $\mathbb{R}$ tout entier), tandis que pour $r_0 > \sqrt{\alpha}$ l'intervalle maximal d'existence de la solution $r(t)$ est encore $\left]-\dfrac{1}{2\alpha}\ln\dfrac{r_0^2}{r_0^2-\alpha}, +\infty\right[$ : $\overrightarrow{0}$ est un point fixe répulsif et le cercle $\mathcal{C}(\overrightarrow{0}, \sqrt{\alpha})$ est alors une orbite fermée attractive, i.e. un cycle limite attractif.

**4.** a/ On calcule comme dans l'exercice précédent $xx'+yy'$ et $\dfrac{xy'-x'y}{x^2}$ pour obtenir comme annoncé :

$$r' = r\left(r^2 - \frac{1}{2}\right)(1-r^2), \;\; \theta' = 1$$

.
$r_0 = 0$ est un point fixe de l'équation en $r$, donc $\overrightarrow{0}$ est un point fixe du système ; $r_0 = 1$ et $r_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ sont aussi des points fixes de l'équation en $r$, et comme l'équation en $\theta$ (qui s'intègre en $\theta = \theta_0 + t$) est découplée de l'équation en $r$, la variable $\theta$ décrit $\mathbb{R}$ tout entier, et les cercles $\mathcal{C}(\overrightarrow{0}, 1)$ et $\mathcal{C}(\overrightarrow{0}, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$ sont des trajectoires particulières (orbites fermées) du système.

b/ Les calculs du texte se font sans difficulté, la valeur de la constante $\lambda$ s'obtenant en faisant $t = 0$. On en déduit en continuant le calcul, que $r^2 - \dfrac{1}{2} = \pm\dfrac{1}{2}\dfrac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{\lambda + e^t}}$. Pour en déduire $r$ en fonction de $t$, il faut prendre quelques précautions :

c/ D'abord $y = r^2$ est toujours strictement positif (on a exclu le cas $y_0 = 0$ après le a/) et d'autre part, si $y_0 > 1$, alors $y_0(1-y_0) < 0$, et donc $\lambda < 0$, d'où $y(1-y) < 0$ pour tout $t$, ce qui implique $y > 1$ (puisque $y < 0$ est exclu). Reste à évaluer les cas $0 < y_0 < \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2} < y_0 < 1$. On peut, comme y invite le texte, faire le raisonnement suivant : pour tout $y$ strictement compris entre $0$ et $\dfrac{1}{2}$, on a $y' = 2y\left(y - \dfrac{1}{2}\right)(1-y) < 0$, donc $y$ ne peut que décroître : il en résulte que si $y_0 < \dfrac{1}{2}$, on aura aussi $y < \dfrac{1}{2}$ ; et de même, si $y_0 > \dfrac{1}{2}$, on aura aussi $y > \dfrac{1}{2}$. Mais on pourrait aussi utiliser le fait que des trajectoires distinctes d'un système autonome ne se coupant jamais, la trajectoire fermée constituée par le cercle $\mathcal{C}\left(\overrightarrow{0}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est donc une barrière infranchissable pour le flot : en effet une trajectoire ayant au moins un point dans $0 < r < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ou d'ailleurs dans $r > \frac{1}{\sqrt{2}}$) est nécessairement distincte de la trajectoire constituée par le cercle en question, sur lequel $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour tout $t$. Donc $r_0 < \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow r < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et de même (même raisonnement pour le cercle $\mathcal{C}(\overrightarrow{0}, 1)$) $\frac{1}{\sqrt{2}} < r_0 < 1 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < r < 1$.

d/ On peut alors exprimer $r$ en fonction de $t$ en distinguant les cas (i), (ii) et (iii) :

- Si $0 < r_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\lambda > 0$ et $0 < \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{\lambda + e^t}} < 1$ ; comme $r^2$ reste inférieur à $\frac{1}{2}$, c'est que $r^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{\lambda + e^t}}$ ; dans ce cas, $r \longrightarrow 0$ pour $t \longrightarrow +\infty$ et $r \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour $t \longrightarrow -\infty$ : $\overrightarrow{0}$ est un point fixe attractif (= stable) et le cercle $\mathcal{C}\left(\overrightarrow{0}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ un cycle limite répulsif (= instable).

- Si $\frac{1}{\sqrt{2}} < r_0 < 1$, alors $\lambda > 0$ et de même $0 < \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{\lambda + e^t}} < 1$ ; mais comme $r^2$ reste supérieur à $\frac{1}{2}$, c'est que $r^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{\lambda + e^t}}$ ; et dans ce cas $r \longrightarrow 1$ pour $t \longrightarrow +\infty$ et $r \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour $t \longrightarrow -\infty$ : le cercle $\mathcal{C}(\overrightarrow{0}, 1)$ est un cycle limite attractif et le cercle $\mathcal{C}\left(\overrightarrow{0}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ un cycle limite répulsif.

- Enfin, si $r_0 > 1$, alors $\lambda < 0$ et $\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{\lambda + e^t}} > 1$ ; comme $r^2$ reste supérieur à $1$, c'est que $r^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{\lambda + e^t}}$ ; dans ce cas $r \longrightarrow 1$ pour $t \longrightarrow +\infty$ : le cercle $\mathcal{C}(\overrightarrow{0}, 1)$ est un cycle limite attractif, et enfin l'intervalle maximal d'existence de la solution $r(t)$ est $]\ln|\lambda|, +\infty[$.

Au total, il y a donc bien un point fixe stable : l'origine, un cycle limite instable : le cercle $\mathcal{C}\left(\overrightarrow{0}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, et un cycle limite stable : le cercle $\mathcal{C}(\overrightarrow{0}, 1)$.

---

N. B. : ces exercices sont librement inspirés, ou directement tirés, des livres de L. Perko : *Differential equations and dynamical systems* (Ed. Springer) et S. Strogatz : *Nonlinear dynamics and chaos* (Ed. Addison Wesley), dont la lecture est vivement conseillée aux étudiants.