

Examen partiel du 24 avril 1998

- 1. (8 points)** a/ Résoudre algébriquement (= sous forme $x + iy$) dans \mathbb{C} l'équation $z^2 = 1 + i$.
 b/ Déterminer module et argument de $1 + i$, puis des deux racines de l'équation $z^2 = 1 + i$. En déduire la valeur (avec des racines carrées) de $\cos \frac{\pi}{8}$ et de $\sin \frac{\pi}{8}$.
 c/ En remarquant que $(1 + i)^2 = (-1 - i)^2 = 2i$, en déduire les 4 racines dans \mathbb{C} de l'équation $z^4 = 2i$, sous forme algébrique et sous forme exponentielle, et les représenter sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[4]{2}$.

- 2. (8 points)** \mathbb{R}^3 est muni de la base canonique $\left\{ \vec{e}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $\varphi(\vec{e}_1) = -5\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2$, $\varphi(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\varphi(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_3$. Donner la matrice A de φ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Trouver valeurs propres et vecteurs propres de A , diagonaliser A , calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et $\exp tA$ pour $t \in \mathbb{R}$.

- 3. (8 points)** Soit $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, \mathbb{R}^3 étant muni de la base canonique $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, définie par $\psi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\psi(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\psi(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Donner la matrice B de ψ dans la base canonique. Pourquoi peut-on affirmer sans calculs que B est diagonalisable ? À quoi voit-on immédiatement que 2 est valeur propre ? Déterminer toutes les valeurs propres de B (on trouvera 1, -1, et 2). Montrer que les vecteurs propres de B correspondant à des valeurs propres distinctes sont deux à deux orthogonaux ; en déduire une base orthonormée formée de vecteurs propres. Diagonaliser ψ dans la base orthonormée de \mathbb{R}^3 :

$$\left\{ \vec{u} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -2 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \vec{w} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right\}$$

Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$ et $\exp tB$ pour $t \in \mathbb{R}$. N.B. : on rappelle que la matrice de passage d'une b.o.n. à une b.o.n. est orthogonale et que l'inverse d'une matrice orthogonale est sa transposée.