

Examen final (2^e session) du 21 septembre 1998

1. (4 points) a/ Calculer module et argument des nombres complexes $\sqrt{3} + i$ et $\sqrt{3} - i$; b/ résoudre dans \mathbb{C} les 2 équations : $z^2 = \sqrt{3} + i$ et $z^2 = \sqrt{3} - i$, d'abord sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique; c/ résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$; d/ déduire de b/ et c/ les solutions, sous forme algébrique et sous forme exponentielle, de l'équation dans \mathbb{C} : $z^4 - 2\sqrt{3}z^2 + 4 = 0$.

2. (4 points) \mathbb{R}^2 étant muni de la base canonique $\left\{ \vec{e}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, on donne l'endomorphisme φ de \mathbb{R}^2 défini par $\varphi(\vec{e}_1) = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ et $\varphi(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Donner la matrice A de φ dans la base canonique. Calculer A^n , pour $n \in \mathbb{N}$ et $\exp tA$ pour $t \in \mathbb{R}$.

3. (5 points) Soit l'équation différentielle en y : $y'' - 4y' + 4y = (2t - 1)e^{2t}$ (1)

a/ Quelle est la solution générale de l'équation homogène associée ?

b/ Montrer qu'il existe une solution particulière de la forme $y = t^2(at + b)e^{2t}$.

c/ En déduire la solution générale de (1), puis l'unique solution de (1) qui satisfait aux conditions initiales $y(0) = 1, y'(0) = -1$.

4. (5 points) On donne le système dynamique à temps discret (où $\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \alpha u_n - v_n + 1 \\ v_{n+1} = \alpha^2 u_n + v_n + 2 \end{cases}$$

a/ On suppose $\alpha = 0$. Déterminer u_n et v_n en fonction de n et v_0 . Le système admet-il un équilibre ?

b/ On suppose dans toute la suite $\alpha \neq 0$. Montrer que le système admet alors toujours un équilibre (u, v) que l'on déterminera en fonction de α .

c/ On suppose $\alpha = 1$. L'équilibre est-il stable ou instable ?

d/ On suppose $\alpha = \frac{1}{2}$. L'équilibre est-il stable ou instable ?

(N.B. : dans c/ et d/ on ne demande pas de calculer u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0 .)

5. (8 points) On donne le système dynamique à temps continu :

$$\begin{cases} x' = -5x + 6y + t \\ y' = -x + te^{-t} \end{cases} \quad (1)$$

a/ Montrer que le système homogène associé admet l'origine $(0, 0)$ comme point d'équilibre stable.

b/ Diagonaliser la matrice $\begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ en vérifiant que $\{\vec{u} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{v} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2\}$ en est une base de vecteurs propres. Soient X et Y les coordonnées dans cette base du vecteur de coordonnées x et y dans la base canonique; exprimer X et Y en fonction de x et y , et inversement.

c/ En déduire que le système (1) en x et y est équivalent au système en X et Y :

$$\begin{cases} X' = -3X + t - 2te^{-t} \\ Y' = -2Y - t + 3te^{-t} \end{cases} \quad (2)$$

Résoudre ce système en vérifiant qu'il admet la solution particulière :

$X = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}t - (t - \frac{1}{2})e^{-t}, Y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t + 3(t - 1)e^{-t}$, et en déduire la solution générale du système (1).

d/ Déterminer l'unique solution du système (1) qui passe en $t = 0$ par $x_0 = -\frac{7}{3}, y_0 = -\frac{13}{36}$.