UNIVERSITÉ PARIS VIII **Mathématiques pour la licence de sciences économiques**

TES **1997-98**

Examen final du 26 juin 1998

1. (4 points) On se propose de calculer par radicaux (= avec des racines carrées) les nombres réels $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$. Pour cela :

a/ Montrer que $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{12}}$ sont les deux racines de l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^2 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$.
b/ Résoudre algébriquement (i.e. sous la forme $a+ib$) cette équation.
c/ En remarquant que $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$ sont tous deux positifs, calculer par radicaux ces deux nombres.

2. (10 points) $\mathbb{R}^2$ étant muni de la base canonique $\left\{\overrightarrow{e_1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$, on donne l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(\overrightarrow{e_1}) = -3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ et $\varphi(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}$.
a/ Donner la matrice A de φ dans la base canonique. Pourquoi peut-on affirmer sans calculs que A est diagonalisable ?...que -2 est valeur propre de A ?...que -4 est l'autre valeur propre ? (on rappelle que la trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres). Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\exp tA$ pour $t \in \mathbb{R}$.
b/ On donne le système dynamique à temps discret :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= -3x_n + y_n + 2 \\ y_{n+1} &= x_n - 3y_n + 2 \end{cases}$$

Montrer que ce système admet un équilibre ; cet équilibre est-il stable ou instable ? Donner x_n et y_n en fonction de n, x_0 et y_0. Déterminer la solution du système qui passe par $x_0 = 1$ et $y_0 = -1$ en $n = 0$.
c/ On donne le système dynamique à temps continu :

$$\begin{cases} x' &= -3x + y + 2 \\ y' &= x - 3y + 2 \end{cases}$$

Montrer que ce système admet un point d'équilibre ; cet équilibre est-il stable ou instable ? Donner x et y en fonction de t, x_0 et y_0. Déterminer la solution qui passe par $x_0 = 1$ et $y_0 = -1$ en $t = 0$

3. (6 points) Résoudre l'équation différentielle en y : $y'' + y' - 2y = te^t$
(on cherchera une solution particulière de la forme $y_1 = (at^2 + bt)e^t$).

4. (8 points) On donne le système dynamique à temps discret (où $a \in \mathbb{R}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$) :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= ax_n + y_n + 1 \\ y_{n+1} &= ay_n + 2 \end{cases}$$

a/ Montrer par récurrence sur n que si $a = 1$, $x_n = n^2 + n + 1$, $y_n = 2n + 1$. On supposera dans toute la suite que $a \neq 1$.
b/ Montrer que (pour $a \neq 1$) ce système admet un unique point d'équilibre $(x^\star, y^\star)$ que l'on déterminera ; à quelle condition sur a cet équilibre est-il stable ?
c/ Montrer par récurrence sur n que $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$. En déduire x_n et y_n en fonction de n.