UNIVERSITÉ PARIS VIII **Mathématiques pour la licence de sciences économiques**
TES **1996-97**

Examen final (2e session) du 16 septembre 1997

1. (4 points) a/ Donner module et argument des nombres complexes $1+i\sqrt{3}$ et $1-i\sqrt{3}$.
b/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations : $z^2 = 1+i\sqrt{3}$ et $z^2 = 1-i\sqrt{3}$ d'abord sous forme trigonométrique (exponentielle), puis sous forme algébrique.
c/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2z+4=0$.
d/ Déduire de b/ et c/ la résolution de l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^4-2z^2+4=0$.

2. (6 points) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini dans la base canonique $\left\{\overrightarrow{e_1}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ par : $f(\overrightarrow{e_1}) = \frac{5}{3}\overrightarrow{e_1} - \frac{1}{6}\overrightarrow{e_2}$ et $f(\overrightarrow{e_2}) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{e_1} + \frac{5}{3}\overrightarrow{e_2}$. Quelle est la matrice A de f dans la base canonique ? Donner valeurs propres et vecteurs propres de f ; calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$, et $\exp tA$, pour $t \in \mathbb{R}$.

3. (8 points) On considère l'équation de récurrence : $u_n = \alpha u_{n-1} - 4u_{n-2} + 1$ (1) avec les conditions initiales : $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

a/ Montrer que 1 est racine du polynôme caractéristique (ou encore : valeur propre de la matrice du système de dimension 2 associé) si et seulement si $\alpha = 5$, ce qu'on suppose dans la suite du a/. Quelle est alors l'autre racine du polynôme caractéristique ? Donner la solution générale de l'équation homogène associée. Montrer que l'équation complète (1) n'a pas de point d'équilibre, mais admet une solution particulière de la forme $w_n = kn$. En déduire la solution générale de l'équation complète (1), puis la solution de l'équation complète (1) qui satisfait aux conditions initiales.

b/ On suppose $\alpha = -5$. Montrer que l'équation (1) admet un équilibre unique. Quelles sont les deux racines du polynôme caractéristique ? Donner la solution générale de l'équation homogène associée ; en déduire la solution générale de l'équation complète (1), puis la solution de l'équation complète (1) qui satisfait aux conditions initiales.

c/ On suppose $\alpha = 4$. Montrer que l'équation (1) admet un équilibre unique. Montrer que le polynôme caractéristique admet 2 pour racine double. On rappelle qu'alors la solution générale de l'équation homogène associée est $u_n = \lambda 2^n + \mu n 2^n$. En déduire la solution générale de l'équation complète (1), puis la solution de l'équation complète (1) qui satisfait aux conditions initiales.

d/ On suppose $\alpha = 0$. Montrer que l'équation (1) admet un équilibre unique. Montrer que le polynôme caractéristique a deux racines complexes conjuguées. Donner la solution générale de l'équation homogène associée ; en déduire la solution générale de l'équation complète (1), puis la solution de l'équation complète (1) qui satisfait aux conditions initiales.

e/ Montrer que, dans aucun des quatre cas envisagés, le système dynamique (1) n'admet d'équilibre stable. Pourquoi peut-on affirmer que ce système n'en admet jamais, quelle que soit la valeur de α ? (indication : le produit des valeurs propres, racines du polynôme caractéristique, est égal à 4).

4. (6 points) On considère le système différentiel : $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -5x+6y+1 \\ y' & = & -x+2 \end{array}\right.$

Montrer que ce système a un équilibre unique. Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de la matrice du système. L'équilibre est-il stable ou instable ? Donner la solution générale de l'équation homogène associée, d'abord dans la base propre, puis dans la base canonique (faire le changement de coordonnées $\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, si P est la matrice de passage de la base canonique à la base propre).

En déduire la solution générale du système, puis celle qui en $t=0$ passe par $x_0 = 1$, $y_0 = \dfrac{1}{2}$.