

**Examen final (2<sup>e</sup> session) du 19 septembre 2000**

**1. (4 points)** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 = 1 + i$  sous forme trigonométrique (exponentielle) et sous forme algébrique. En déduire l'expression à l'aide de racines carrées de  $\cos \frac{\pi}{8}$  et  $\sin \frac{\pi}{8}$ .

**2. (6 points)** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  défini dans la base canonique  $\left\{ \vec{e}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  par :  
 $f(\vec{e}_1) = \frac{5}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{6}\vec{e}_2$  et  $f(\vec{e}_2) = -\frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{5}{3}\vec{e}_2$ . Quelle est la matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique ?  
 Donner valeurs propres et vecteurs propres de  $f$  ; calculer  $A^n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , et  $\exp tA$ , pour  $t \in \mathbb{R}$ .

**3. (6 points)** Soit le système dynamique à temps discret :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= -3x_n + y_n + 1 \\ y_{n+1} &= 2x_n - 4y_n \end{cases}$$

Montrer que ce système admet un point d'équilibre unique que l'on déterminera. Cet équilibre est-il stable ou instable ? Donner la solution générale du système homogène associé ; en déduire la solution du système complet satisfaisant à  $x_0 = 1$  et  $y_0 = 0$ .

**4. (8 points)** a/ Soit le système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= -3x + y + 1 \\ y' &= 2x - 4y \end{cases} \quad (1)$$

Montrer que ce système admet un point d'équilibre unique que l'on déterminera. Cet équilibre est-il stable ou instable ? Donner la solution générale du système homogène associé. En déduire la solution générale du système complet (1).

b/ Soit le système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= -3x + y + 1 \\ y' &= 2x - 4y + e^{-t} \end{cases} \quad (2)$$

Montrer qu'il existe une solution particulière de la forme  $(x_1 = a + be^{-t}, y_1 = c + de^{-t})$ . En déduire la solution générale du système (2). Que se passe-t-il lorsque  $t \rightarrow +\infty$  ?

c/ Comparer la solution générale de (1) et la solution générale de (2). Donner la solution de (2) qui passe par  $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$  en  $t = 0$ . Même question pour le système (1).

---