

Examen partiel du 11 mai 1999

1. (8 points) Soit $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $(x, y) \mapsto f(x, y) = xy(1 - x - y)$.

Montrer que f est bornée et atteint ses bornes sur le carré $[0, 1]^2$. On se propose de déterminer dans la suite ces bornes, maximum et minimum, et les points du carré où elles sont atteintes.

Calculer f en tout point du bord du carré $[0, 1]^2$ et en déduire les bornes de f sur le bord du carré.

Calculer le gradient et la hessienne de f en tout point (x, y) . Montrer que le gradient de f s'annule en 4 points, mais que parmi ces points, un seul est strictement à l'intérieur du carré, et que c'est un maximum local pour f (remarque : il n'y a donc pas de minimum local à l'intérieur strict, i.e. bord non compris, du carré, et le minimum de f sur le carré tout entier n'est donc atteint qu'au bord).

En déduire les bornes de f sur le carré tout entier et les points du carré où elles sont atteintes.

2. (4 points) Déterminer les sommets de la conique plane de centre $O(0, 0)$ d'équation $Q(X, Y) = X^2 - XY + Y^2 = 3$ en calculant les extrema de la fonction carré de la norme euclidienne sous la contrainte $Q(X, Y) - 3 = 0$.

Montrer que cette conique est une ellipse, et donner également les longueurs de ses axes.

3. (8 points) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, espace vectoriel euclidien, définie par :

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto f(\vec{U}) = \begin{bmatrix} e^{-a}(x \cos b - y \sin b - 1) \\ e^{-a}(x \sin b + y \cos b - 1) \end{bmatrix}, \text{ où } a > 0 \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

Donner par sa matrice jacobienne la différentielle $d_{\vec{U}}f$ de f en $\vec{U} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et vérifier qu'elle est indépendante du choix de \vec{U} . Calculer $\|d_{\vec{U}}f(\vec{H})\|$, pour $\vec{H} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ et en déduire la norme $\|d_{\vec{U}}f\|$ de l'application linéaire $d_{\vec{U}}f$.

Montrer que $\forall \vec{U}, \forall \vec{V}, \|f(\vec{U}) - f(\vec{V})\| = \|d_{\vec{U}}f\| \|\vec{U} - \vec{V}\|$ et en déduire que f est contractante.

(On rappelle que f est contractante ssi $\exists k, 0 < k < 1, \forall \vec{x}, \forall \vec{y}, \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leq k \|\vec{x} - \vec{y}\|$).

On donne la suite $(\vec{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^2 définie par $\vec{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{X}_{n+1} = f(\vec{X}_n)$. Montrer, à l'aide du théorème du point fixe (cf. feuille n°2, ex. 8.) que la suite $(\vec{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

4. (4 points) Un menuisier doit réaliser un caisson parallélépipédique rectangulaire de volume V maximum en utilisant une superficie totale de bois S donnée, sans autre limitation sur les dimensions.

Quelles doivent être les proportions du caisson ? (autrement dit, si on note x, y , et z les mesures des 3 arêtes du caisson : largeur, hauteur, profondeur, quels doivent être les rapports entre x, y , et z ?)

5. (4 points) Montrer que l'équation $e^x + e^y + x^2 + y^2 - 2 = 0$ définit au voisinage de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 une fonction implicite $y = \varphi(x)$ dont on donnera un développement limité à l'ordre 2 en 0. La même équation permet-elle également de définir au voisinage de $(0, 0)$ une fonction $x = \psi(y)$?