UNIVERSITÉ PARIS VIII **CALCUL DIFFÉRENTIEL**
Licence de mathématiques **2001-2002**
Licence/Maîtrise d'informatique, option mathématiques

Examen partiel du 19 décembre 2001

1. (4 points) Déterminer les extrema dans $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

2. (6 points) On donne les applications $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{x = 0\} \setminus \{y = 0\} \setminus \{z = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par : $\varphi(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$ et $\psi(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^2$. Calculer la matrice jacobienne $J_{(x,y,z)}\varphi$ et le gradient $\overrightarrow{\nabla_{(u,v,w)}\psi}$; en déduire le gradient $\overrightarrow{\nabla_{(x,y,z)}\psi \circ \varphi}$ de $\psi \circ \varphi$ (on montrera que $\overrightarrow{\nabla_{(x,y,z)}\psi \circ \varphi} = {}^t\left[J_{(x,y,z)}\varphi\right] \overrightarrow{\nabla_{\varphi(x,y,z)}\psi}$). Calculer la hessienne $\nabla^2_{(x,y,z)}\psi \circ \varphi$ et écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 en $(1, 1, 1)$ pour $\psi \circ \varphi$. En écrivant (vérifier cette formule) : $4(h^2 + k^2 + l^2 - hk - kl - lh) = 3(h - k)^2 + (h + k - 2l)^2$, montrer que cette hessienne est positive, mais *non définie positive* (i.e. son noyau n'est pas réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$). On admettra d'autre part que $\forall a > 0, \forall b > 0, \forall c > 0, \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$: vérifier que $(1, 1, 1)$ est pour $\psi \circ \varphi$ un minimum local (et aussi d'ailleurs global) *non strict* en remarquant que tout point de la droite $\{x = y = z\}$ donne lieu au même minimum, égal à 3, pour $\psi \circ \varphi$).

Dans toute la suite, $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'une b.o.n. $\{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$.

3. (8 points) On considère un système linéaire *surdéterminé* $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, où $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^p$, avec A matrice à p lignes et n colonnes de rang $n < p$ (il y a plus d'équations que d'inconnues, donc en général il n'y a pas de solution, mais la matrice A est supposée de rang maximum n, i.e. l'application linéaire sous-jacente est injective).

Exemple (à traiter en application) : $\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y &=& 1 \\ x - 2y &=& 1 \\ x - y &=& 1 \end{array}\right.$ (vérifier qu'il n'y a pas de solution).

On se propose de déterminer le vecteur $\overrightarrow{x}$ qui minimise la norme euclidienne $||A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}||$ (on dit aussi : "qui soit solution de l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ au sens des moindres carrés").

Calculer le gradient de l'application $f : \overrightarrow{x} \mapsto ||A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}||^2$ (indication : composer l'application $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}$ avec l'application $\overrightarrow{y} \mapsto ||\overrightarrow{y}||^2$ pour obtenir que $f'(\overrightarrow{x})(\overrightarrow{h}) = 2 < A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}, A\overrightarrow{h} >$, autrement dit que $\overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x}} f} = 2\,{}^tA(A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b})$) et en déduire qu'en un point $\overrightarrow{x}$ extrémal (= critique) pour f, on a : ${}^tAA\overrightarrow{x} = {}^tA\overrightarrow{b}$. Montrer que le fait pour A d'être de rang maximum implique que ${}^tAA$ est inversible (indication : d'après l'hypothèse, A est la matrice d'une application linéaire injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, i.e. si $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$; prendre alors $\overrightarrow{u} \in Ker\,{}^tAA$ et montrer que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$: ${}^tAA$ est donc la matrice d'une application linéaire injective de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, i.e. d'un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$). En déduire que le seul extremum pour f est $\overrightarrow{x} = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\overrightarrow{b}$. Montrer que la hessienne $\nabla^2_{\overrightarrow{x}} f$ de f est égale pour tout $\overrightarrow{x}$ à $2\,{}^tAA$ (N.B. : remarquer que le gradient de f est affine en la variable $\overrightarrow{x}$). Montrer qu'elle est définie positive en tout $\overrightarrow{x}$ et en déduire que l'extremum local déterminé précédemment est un minimum pour f : c'est la "solution au sens des moindres carrés" cherchée. Application numérique : calculer la solution au sens des moindres carrés de l'exemple introductif.

T.S.V.P.

4. (12 points) a/ Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x}{1+x^2} + a$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ et en déduire, à l'aide de la formule des accroissements finis, que f est contractante de $\mathbb{R}$ dans lui-même. En déduire que $\forall a \in \mathbb{R}$, l'équation en x : $\dfrac{\frac{1}{2}+x^2}{1+x^2}x = a$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$. Application numérique : en prenant $a = \frac{1}{2}$, montrer que l'équation en x : $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ a une seule racine réelle. En donner un algorithme de calcul approché à l'aide de la méthode des approximations successives (définir une suite récurrente de la forme $x_{n+1} = f(x_n)$).

b/ Soit l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{\frac{1}{2}z}{1+|z|^2} + a$, où $a \in \mathbb{C}$, qui peut encore s'écrire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: $f : (x,y) \mapsto \left(\dfrac{\frac{1}{2}x}{1+x^2+y^2} + \mathfrak{Re}(a), \dfrac{\frac{1}{2}y}{1+x^2+y^2} + \mathfrak{Im}(a)\right)$. Calculer la matrice jacobienne de f comme application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même ; vérifier qu'elle est symétrique (on rappelle qu'une matrice symétrique réelle est toujours diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux) et que ses valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = \dfrac{\frac{1}{2}(1 \pm (x^2+y^2))}{(1+x^2+y^2)^2}$. En utilisant la décomposition dans $\mathbb{R}^2$: $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{h_1} + \overrightarrow{h_2}$, où $\overrightarrow{h_1}$ et $\overrightarrow{h_2}$ sont des vecteurs propres (orthogonaux) de $J_{(x,y)}f$, et en développant $\left|\left|J_{(x,y)}f.\overrightarrow{h}\right|\right|^2$, montrer que $\left|\left|J_{(x,y)}f\right|\right| \leq \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ et en déduire que f est contractante de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même et que $\forall a \in \mathbb{C}$, l'équation en z : $\dfrac{\frac{1}{2}+|z|^2}{1+|z|^2}z = a$ a une seule solution dans $\mathbb{C}$. Application numérique : en prenant $a = \frac{1+i}{2}$, montrer que le système d'équations en x et y :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x^2+y^2)x - \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & = & 0 \\ (x^2+y^2)y - \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} & = & 0 \end{array}\right.$$

a une seule solution dans $\mathbb{R}^2$. Proposer un algorithme (dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{C}$) pour en donner une valeur approchée.

c/ Plus généralement, soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par : $f(\overrightarrow{x}) = \dfrac{\frac{1}{2}\overrightarrow{x}}{1+||\overrightarrow{x}||^2} + \overrightarrow{a}$, où $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que la différentielle de f est donnée par : $f'(\overrightarrow{x})(\overrightarrow{h}) = \dfrac{\frac{1}{2}\overrightarrow{h}}{1+||\overrightarrow{x}||^2} - \dfrac{<\overrightarrow{x}, \overrightarrow{h}> \overrightarrow{x}}{(1+||\overrightarrow{x}||)^2}$ (différentiation des fonctions composées ; on pourra admettre ce résultat) et en déduire l'expression suivante de la matrice jacobienne de f : $J_{\overrightarrow{x}}f = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+||\overrightarrow{x}||^2}\left[I - 2\dfrac{\overrightarrow{x}.{}^t\overrightarrow{x}}{1+||\overrightarrow{x}||^2}\right]$.
Chercher les vecteurs propres de l'endomorphisme $f'(\overrightarrow{x})$ de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $\overrightarrow{h} = t\overrightarrow{x}$, où $t \in \mathbb{R}$, d'une part, et $\overrightarrow{h} \in \{\overrightarrow{x}\}^\perp$ d'autre part, et en déduire la diagonalisation de $f'(\overrightarrow{x})$ (on vérifiera que dans la décomposition en somme directe orthogonale : $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\overrightarrow{x} \overset{\perp}{\oplus} \{\overrightarrow{x}\}^\perp$, $\mathbb{R}\overrightarrow{x}$ est sous-espace propre, associé à la valeur propre $\dfrac{\frac{1}{2}(1-||\overrightarrow{x}||^2)}{(1+||\overrightarrow{x}||^2)^2}$ et que $\{\overrightarrow{x}\}^\perp$ est aussi sous-espace propre, associé à la valeur propre $\dfrac{\frac{1}{2}}{1+||\overrightarrow{x}||^2}$). En déduire (comme en b/) que f est contractante de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même et que $\forall\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$, l'équation en $\overrightarrow{x}$: $\dfrac{\frac{1}{2}+||\overrightarrow{x}||^2}{1+||\overrightarrow{x}||^2}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a}$ a une seule solution dans $\mathbb{R}^n$. Application numérique : en prenant $\overrightarrow{a} = \frac{1}{2}\overrightarrow{e_1} + \ldots + \frac{1}{2}\overrightarrow{e_n}$, proposer un algorithme dans $\mathbb{R}^n$ pour donner une valeur approchée de cette solution.