Examen final du 24 juin 1999

1. (5 points) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $(x, y) \mapsto f(x, y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$. Déterminer les extrema de f (N.B. : on pourra transformer la condition $\overrightarrow{\nabla f} = \overrightarrow{0}$ en $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$; pour l'étude au voisinage de l'origine, on vérifiera que $\nabla^2 f$ n'y est pas une forme quadratique *définie*, mais que pour tout x assez voisin de 0 mais distinct de 0, $f(x, x) > 0$ et $f(x, -x) < 0$).

2. (4 points) Étant donné l'ensemble à n éléments $\{1, 2, \dots, n\}$, on appelle *probabilité* sur cet ensemble tout n-uplet $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ de nombres positifs ou nuls, et tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ (p_i est la probabilité de l'événement i) ; on appelle *entropie d'information* de la probabilité $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ le nombre (positif ou nul) $H(p_1, p_2, \dots, p_n) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$ (où on prolonge par continuité en zéro la fonction $x \mapsto x \ln x$, i.e. en donnant à cette fonction la valeur 0 en 0). Montrer que la probabilité qui maximise l'entropie d'information est la probabilité *uniforme*, i.e. définie par : $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $p_i = \dfrac{1}{n}$. Pourquoi s'agit-il bien d'un maximum ? Quelle(s) probabilité(s) sur $\{1, 2, \dots, n\}$ pourrait-on définir pour rendre cette entropie *minimum* ?

3. (8 points) Soit le système différentiel linéaire de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{X'} = A\overrightarrow{X} + \overrightarrow{b(t)}$ (1), avec $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a/ On suppose $\overrightarrow{b(t)} = \overrightarrow{0}$. Montrer que l'origine est un point d'équilibre hyperbolique pour ce système. Déterminer son sous-espace stable et son sous-espace instable. Quelle est la nature du point d'équilibre $(0, 0)$ pour le système projeté dans le plan $\{z = 0\}$? N.B. : il s'agit donc du système différentiel de $\mathbb{R}^2$: $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -2x + y \\ y' & = & -2x \end{array} \right.$. Donner la solution générale du système (1) en $\overrightarrow{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

N.B. : Pour abréger les calculs, on donne : $\exp t \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2 \sin t & \cos t + \sin t \end{bmatrix}$, d'où :

$$\exp t \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}(\cos t - \sin t) & e^{-t} \sin t & 0 \\ -2e^{-t} \sin t & e^{-t}(\cos t + \sin t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

b/ On suppose $\overrightarrow{b(t)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Déterminer l'unique point d'équilibre et déduire du a/ la solution générale du système (1).

c/ On suppose $\overrightarrow{b(t)} = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos t \\ e^{-t} \sin t \\ te^{2t} \end{bmatrix}$. Donner la solution générale du système (1).

4. (6 points) Soit le système différentiel non linéaire : $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x(3 - x - 2y) \\ y' & = & y(2 - x - y) \end{array} \right.$ (modèle de compétition entre espèces animales de type Lotka-Volterra, cf. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 6.4).

Déterminer les points d'équilibre de ce système et vérifier qu'ils sont tous hyperboliques. Les classer en nœuds (stables ou instables), points-selles, etc. Quel théorème permet de ramener en chacun de ces points l'étude du système non linéaire à celle de son système linéarisé tangent ?