Examen final du 29 juin 1998

1. (6 points) Soit l'application $\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à $z \in \mathbb{C}$ associe $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.
a/ Montrer en posant $z = x + iy$ qu'on définit naturellement à partir de cette application une application $\mathrm{Cos} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qu'on exprimera à l'aide de fonctions usuelles (sin, $\cos$, ch, sh) et dont on calculera la matrice jacobienne et le jacobien.
b/ On dit qu'une application est *conforme* lorsque sa différentielle est une similitude. Montrer que l'application Cos est conforme (on pourra vérifier que les vecteurs colonnes de la matrice jacobienne sont orthogonaux et de même norme, norme qui est le rapport de la similitude). La similitude est-elle directe ou inverse ?

2. (6 points) Soit la conique plane (C), d'équation

$$F(X, Y) = 3X^2 - 2XY + 3Y^2 - 4 = 0$$

(Elle admet l'origine $O(0, 0)$ comme centre de symétrie.)
a/Trouver les axes et les sommets de cette conique, i.e. déterminer les points (X_0, Y_0) de (C) qui sont extrémaux pour la fonction carré de la norme euclidienne : $X^2 + Y^2$, sous la contrainte $F(X, Y) = 0$.
b/ Donner l'équation de (C) dans une base $\left\{ \overrightarrow{U} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{V} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^2$, où (X_0, Y_0) et (X_1, Y_1) sont des points extrémaux trouvés en a/.

3. (6 points) Montrer que l'équation : $e^x - e^y + xy = 0$ définit au voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$ une fonction implicite $y = \varphi(x)$ indéfiniment dérivable dont on donnera un développement limité à l'ordre 3 en 0.

4. (6 points) Soit (S) la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$F(X, Y, Z) = \frac{X^4}{a^4} + \frac{Y^4}{b^4} + \frac{Z^4}{c^4} - 3 = 0$$

a/ Montrer que (S) est en chacun de ses points une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
b/ Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 pour F au voisinage de $M_0(a, b, c)$.
c/ Donner l'équation du plan affine $M_0 + T_{M_0}S$ tangent à (S) en M_0 et déterminer la position de (S) par rapport à son plan affine tangent $M_0 + T_{M_0}S$.
d/ Mêmes questions qu'en b/ et c/ en remplaçant M_0 par $M_1(a, b, -c)$.

5. (6 points) Même exercice qu'à la question **2.**, en remplaçant $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}^3$ et l'équation $F(X, Y) = 0$ par :

$$G(X, Y, Z) = X^2 + 6Y^2 + 6Z^2 - 2XY - 2YZ - 2ZX - 84 = 0$$

On trouvera un ellipsoïde dont on calculera la longueur des 3 axes (= ses 3 diamètres).