

Examen final (2^e session) du 3 juillet 2003 (suivi de son corrigé)

1. (6 points) Déterminer les points critiques dans \mathbb{R}^3 de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2(x + y + z)^2 + 8(x + y + z)$. Écrire en chacun de ces points la formule de Taylor à l'ordre 2. On trouvera un extremum local strict d'une part, mais aussi un point critique \vec{x}_0 *dégénéré*, i.e. en lequel la matrice hessienne $\nabla^2 f$ admet 0 pour valeur propre, donc pour lequel on ne peut pas conclure sans un examen plus approfondi. Dans ce dernier cas, pour $\vec{h} \in \text{Ker} \nabla^2 f$, calculer $f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0)$: montrer que cette expression change de signe suivant \vec{h} , et que \vec{x}_0 ne peut de ce fait être un extremum local pour f . Existe-t-il des extrema globaux pour f sur \mathbb{R}^3 ?

2. (4 points) Déterminer par le calcul différentiel (théorème des extrema liés) les axes (direction, longueur) de l'ellipse de \mathbb{R}^2 d'équation $8X^2 + 4XY + 5Y^2 = 9$.

3. (8 points) Le tore (T) obtenu en faisant tourner dans \mathbb{R}^3 un cercle de diamètre 1 autour d'un axe parallèle au plan du cercle et situé à une distance $\frac{3}{2}$ du centre du cercle peut être paramétré ainsi : $(T) = \text{Im}(F)$, avec $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ et F définie par :

$$F(\theta, \varphi) = \left(\frac{1}{2} \cos \theta (3 + \cos \varphi), \frac{1}{2} \sin \theta (3 + \cos \varphi), \frac{1}{2} \sin \varphi \right)$$

Montrer que si $G(x, y, z) = (5 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2)^2 + 36z^2 - 9$, alors $(T) = G^{-1}(\{0\})$ (éliminer θ et φ entre les 3 équations $(x, y, z) = F(\theta, \varphi)$). Montrer de deux façons différentes que (T) est un compact de \mathbb{R}^3 . Montrer que F restreinte à $[0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$ est un plongement (immersion injective) de $[0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$ dans \mathbb{R}^3 . Montrer que G est une submersion en tout point de (T) . En déduire que (T) est en tout point une sous-variété de \mathbb{R}^3 . Déterminer l'espace affine tangent à (T) en $(1, 0, 0)$ et en $(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ de deux manières distinctes (image de la différentielle de l'immersion ou noyau de la différentielle de la submersion).

4. (8 points) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $(x, y) \mapsto \left(1 + \frac{x\sqrt{2}}{2 + x^2 + y^2}, -1 + \frac{y\sqrt{2}}{2 + x^2 + y^2} \right)$.

Calculer la matrice jacobienne de f et sa norme euclidienne (on rappelle que la norme euclidienne d'une matrice A est la racine carrée de la plus grande valeur propre de tAA). En déduire à l'aide d'une majoration de cette norme et de la formule des accroissements finis que f est contractante de \mathbb{R}^2 dans lui-même, et qu'elle admet un unique fixe dans \mathbb{R}^2 . En application, donner un algorithme pour résoudre de manière numérique le système

$$\begin{cases} \frac{x\sqrt{2}}{2 + x^2 + y^2} = x - 1 \\ \frac{y\sqrt{2}}{2 + x^2 + y^2} = y + 1 \end{cases}$$

Corrigé de l'examen final (2^e session) du 3 juillet 2003

$$1. \vec{\nabla} f = \vec{0} \text{ ssi } \begin{cases} 4x^3 - 4(x+y+z) + 8 = 0 \\ 4y^3 - 4(x+y+z) + 8 = 0 \\ 4z^3 - 4(x+y+z) + 8 = 0 \end{cases} \text{ d'où } x^3 = y^3 = z^3, \text{ donc } x = y = z, \text{ et } x^3 - 3x + 2 = 0$$

(en divisant par 4). 1 est racine évidente, donc $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$. Les points critiques

de f sont $(1, 1, 1)$ et $(-2, -2, -2)$. Et comme $\nabla^2 f = 4 \begin{bmatrix} 3x^2 - 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3y^2 - 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3z^2 - 1 \end{bmatrix}$, au point

$$(1, 1, 1): \frac{1}{4} \nabla_{(1,1,1)}^2 f = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ d'où } \det \left(\frac{1}{4} \nabla_{(1,1,1)}^2 f - \lambda I \right) = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix}$$

et $\nabla_{(1,1,1)}^2 f$ a pour valeurs propres 0 (simple) et 12 (double); de même au point $(-2, -2, -2)$:

$$\frac{1}{4} \nabla_{(-2,-2,-2)}^2 f = \begin{bmatrix} 11 & -1 & -1 \\ -1 & 11 & -1 \\ -1 & -1 & 11 \end{bmatrix}, \text{ d'où } \det \left(\frac{1}{4} \nabla_{(-2,-2,-2)}^2 f - \lambda I \right) = (9 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 12 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 12 - \lambda \end{vmatrix},$$

et $\nabla_{(-2,-2,-2)}^2 f$ a pour valeurs propres 36 (simple) et 48 (double). Donc en $(-2, -2, -2)$, $\frac{1}{4} \nabla_{(-2,-2,-2)}^2 f$

est définie positive, et $(-2, -2, -2)$ est pour f un minimum strict; en revanche, en $(1, 1, 1)$, $\nabla_{(1,1,1)}^2 f$

est positive, mais pas définie positive, et on ne peut conclure immédiatement. Suivant les indications du texte, choisissons $\vec{h} \in \text{Ker} \nabla_{(1,1,1)}^2 f = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} / \begin{cases} 2x = y + z \\ 2y = x + z \end{cases} \right\} = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, i.e. $\vec{h} = h \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

et calculons, avec $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$: $f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) = 3(1+h)^4 - 18(1+h)^3 + 24(1+h) - 3 + 18 - 24 =$

$12h^3 + o(h^3)$, qui change de signe avec h , donc $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ n'est pas un extremum pour f . Il n'y a

pas de maximum global, car ce serait aussi un maximum local, et on a vu qu'il n'y en avait pas; en revanche le minimum $(-2, -2, -2)$ est un minimum global, car il n'y a pas d'autre minimum local et $f(\vec{x}) \rightarrow +\infty$ pour $\|\vec{x}\| \rightarrow +\infty$.

2. On cherche les extrema de $n = X^2 + Y^2$ sous la contrainte $q(X, Y) = 8X^2 + 4XY + 5Y^2 - 9 = 0$.

On sait qu'alors $\vec{\nabla}_n$ et $\vec{\nabla}_q$ sont proportionnels sur $q^{-1}(0)$, ce qu'on peut écrire, puisque $\vec{\nabla}_n$ ne peut être nul sous la contrainte $q = 0$ (en effet $q(0, 0) \neq 0$): $\vec{\nabla}_n = \lambda^{-1} \vec{\nabla}_q$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}^*$, soit:

$$\begin{cases} 16X + 4Y = \lambda \cdot 2X \\ 4X + 10Y = \lambda \cdot 2Y \end{cases} \text{ avec } q(X, Y) = 8X^2 + 4XY + 5Y^2 - 9 = 0, \text{ donc } (X, Y) \neq (0, 0). \text{ Ceci}$$

est exactement dire que $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ est vecteur propre, associé à la valeur propre λ , de la matrice $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$,

d'où $\begin{vmatrix} 8 - \lambda & 2 \\ 2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$, soit: $\lambda = 4$ ou $\lambda = 9$.

- Pour $\lambda = 4$, on a $Y = -2X$, d'où $8X^2 - 8X^2 + 20X^2 = 9$, soit $X = \pm \frac{3}{2\sqrt{5}}$, d'où les 2 sommets:

$$\left(-\frac{3}{2\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}} \right) \text{ et } \left(\frac{3}{2\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}} \right).$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \text{ et } \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Il en résulte que les axes de cette ellipse sont : le grand axe : le segment porté par la droite d'équation $Y = 2X$, de longueur $2\sqrt{\frac{9}{20} + \frac{9}{5}} = 3$, joignant les sommets $\left(-\frac{3}{2\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ et $\left(\frac{3}{2\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$; et le petit axe : le segment porté par la droite d'équation $Y = \frac{1}{2}X$, de longueur $2\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = 2$, joignant les sommets $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ et $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

3. Éliminons en effet ϑ et φ entre les 3 équations :
$$\begin{cases} 2x = \cos \vartheta (3 + \cos \varphi) \\ 2y = \sin \vartheta (3 + \cos \varphi) \\ 2z = \sin \varphi \end{cases}$$

On a $4z^2 = \sin^2 \varphi$ et $4x^2 + 4y^2 = (3 + \cos \varphi)^2 = 9 + 6 \cos \varphi + 1 - 4z^2$, d'où $\cos \varphi = \frac{4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 10}{6}$

et $\left(\frac{4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 10}{6}\right)^2 + (2z)^2 = 1$, c'est-à-dire $G(x, y, z) = (5 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2)^2 + 36z^2 - 9 = 0$,

et donc $Im(F) \subset G^{-1}(\{0\})$. Inversement, si $G(x, y, z) = 0$, ce même calcul, mené à l'envers, conduit à $\left(\frac{4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 10}{6}\right)^2 + (2z)^2 = 1$ et on est en droit de poser : $\frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5}{3} = \cos \varphi$ et

$2z = \sin \varphi$, d'où, en remplaçant z par $\frac{1}{2} \sin \varphi$ dans la première égalité :

$(2x)^2 + (2y)^2 = 10 - 4z^2 + 6 \cos \varphi = 1 - 4z^2 + 6 \cos \varphi + 9 = 1 - \sin^2 \varphi + 6 \cos \varphi + 9 = (3 + \cos \varphi)^2$ et on est alors en droit de poser : $2x = \cos \vartheta (3 + \cos \varphi)$, $2y = \sin \vartheta (3 + \cos \varphi)$, et donc $G^{-1}(\{0\}) \subset Im(F)$.

(T) est un compact de \mathbb{R}^3 comme image continue (par F) du compact $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ de \mathbb{R}^2 , ou bien parce qu'il est borné ($-2 \leq X \leq 2$, $-2 \leq Y \leq 2$, $-\frac{1}{2} \leq Z \leq \frac{1}{2}$) et fermé comme image réciproque par G (continue parce que polynomiale) du fermé $\{0\}$ de \mathbb{R} .

Pour voir que F est injective, il suffit de reprendre les calculs montrant que $G^{-1}(\{0\}) \subset Im(F)$: on constate que φ est uniquement déterminé dans $[0, 2\pi[$ par les conditions $\cos \varphi = \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5}{3}$

et $\sin \varphi = 2z$, et de même ϑ par les conditions $\cos \vartheta = \frac{2x}{3 + \cos \varphi}$ et $\sin \vartheta = \frac{2y}{3 + \cos \varphi}$. Donc F est injective (et même bijective) de $[0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$ dans (T).

Pour voir que F est une immersion, montrons que $J_{(\vartheta, \varphi)} F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sin \vartheta (3 + \cos \varphi) & -\frac{1}{2} \cos \vartheta \sin \varphi \\ \frac{1}{2} \cos \vartheta (3 + \cos \varphi) & -\frac{1}{2} \sin \vartheta \sin \varphi \\ 0 & \frac{1}{2} \cos \varphi \end{bmatrix}$

est de rang 2 en tout (ϑ, φ) : ceci revient à voir que le produit vectoriel $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vartheta} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial \varphi}$ ne s'annule jamais.

Or $\left\| \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vartheta} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial \varphi} \right\| = \frac{3 + \cos \varphi}{4} \sqrt{\cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \frac{3 + \cos \varphi}{4} \geq \frac{1}{2} > 0$, donc

$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vartheta} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial \varphi}$ ne s'annule jamais, et F est bien une immersion en tout point. Il en résulte (corollaire "T" du théorème d'inversion locale) que (T) est en tout point une sous-variété (compacte) de \mathbb{R}^3 .

Pour voir que $G|_{(T)}$ est une submersion, il faut montrer que $\overrightarrow{\nabla G} = \begin{bmatrix} 8x(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5) \\ 8y(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5) \\ 8z(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5) + 72z \end{bmatrix}$

ne s'annule en aucun point de (T) . Pour que $\overrightarrow{\nabla G}$ s'annule, il faut, soit que $x = 0$ et $y = 0$, et alors $z(z^2 - 5) + 9z = 0$, donc $z = 0$, mais $G(0, 0, 0) \neq 0$: impossible, soit que $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5 = 0$ et que $z = 0$, mais pour un tel (x, y, z) , $G(x, y, z) = -9 \neq 0$: également impossible. Donc $\overrightarrow{\nabla G}$ ne s'annule jamais sur $(T) = G^{-1}(\{0\})$. Il en résulte par un autre argument (corollaire "S" du théorème d'inversion locale) que (T) est en tout point une sous-variété (compacte) de \mathbb{R}^3 .

Pour calculer $\overrightarrow{x_0} + T_{\overrightarrow{x_0}}(T)$, espace affine tangent en $\overrightarrow{x_0}$ à (T) , avec \overrightarrow{x} de coordonnées (X, Y, Z) et $\overrightarrow{x_0}$ de coordonnées (X_0, Y_0, Z_0) :

- on peut écrire que $T_{\overrightarrow{x_0}}(T)$ est l'image de la différentielle de l'immersion F , i.e. l'espace

vectoriel engendré par $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \vartheta}$ et $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \varphi}$, qui a pour équation: $\begin{vmatrix} X & \vdots & \vdots \\ Y & \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \varphi} \\ Z & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0$, et en (X_0, Y_0, Z_0) ,

l'espace affine tangent a pour équation: $\begin{vmatrix} X - X_0 & \vdots & \vdots \\ Y - Y_0 & \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \varphi} \\ Z - Z_0 & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0$ (encore faut-il déterminer

ϑ_0 et φ_0 tels que $F(\vartheta_0, \varphi_0) = (X_0, Y_0, Z_0)$ sur le tore).

- on peut aussi écrire que $T_{\overrightarrow{x_0}}(T)$ est le noyau de la différentielle de la submersion, i.e. l'espace vectoriel d'équation $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x_0}} G} \rangle = 0$ et en (X_0, Y_0, Z_0) , l'espace affine tangent a pour équation: $\langle \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{\nabla_{\overrightarrow{x_0}} G} \rangle = 0$

On applique ces principes de calcul aux points $(1, 0, 0)$ et en $(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ de (T) :

En $(1, 0, 0)$, on a $\sin \varphi = 0$, d'où $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$, donc $3 + \cos \varphi = 4$ ou 2 , d'où $X = 1 = 2 \cos \vartheta$ avec $Y = 0 = 2 \sin \vartheta$ (si $\varphi = 0$), ou $X = 1 = \cos \vartheta$ avec $Y = 0 = \sin \vartheta$ (si $\varphi = \pi$). Seul le deuxième

cas est possible, donc $(1, 0, 0) = F(0, \pi)$, et $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \vartheta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$; de même, en $(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$,

on a $\cos \vartheta = 0$, d'où $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, $\sin \varphi = 1$, donc $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{3}{2} \sin \vartheta = \frac{3}{2}$, donc $\vartheta = \frac{\pi}{2}$; on a

alors $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \vartheta} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$. Par le second procédé (submersion), on trouve en $(1, 0, 0)$ que

$\overrightarrow{\nabla_{(1,0,0)} G}$ est colinéaire à $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, et en $(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ que $\overrightarrow{\nabla_{(0,\frac{3}{2},\frac{1}{2})} G}$ est colinéaire à $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Par un procédé comme par l'autre, on trouve finalement: $X = 1$ pour l'équation de l'espace affine tangent en $(1, 0, 0)$, et $Z = \frac{1}{2}$ pour l'équation de l'espace affine tangent en $(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

4. On calcule la matrice jacobienne de $f: J_{(x,y)} f = \frac{\sqrt{2}}{(2+x^2+y^2)^2} \begin{bmatrix} 2-x^2+y^2 & -2xy \\ -2xy & 2+x^2-y^2 \end{bmatrix}$.

grande valeur propre. Or les valeurs propres de $A = J_{(x,y)}f$ sont $\frac{\sqrt{2}}{(2+x^2+y^2)^2}$ fois les racines de $(2-x^2+y^2-\lambda)(2+x^2-y^2-\lambda)-4x^2y^2 = (2-\lambda)^2 - (x^2-y^2)^2 - 4x^2y^2 = (2-\lambda)^2 - (x^2+y^2)^2$, soit $\frac{\sqrt{2}}{(2+x^2+y^2)^2} (2 \pm (x^2+y^2))$, dont la plus grande est $\frac{\sqrt{2}}{2+x^2+y^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$. D'après la formule des accroissements finis, $\|f(x,y) - f(x',y')\| \leq \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \|J_{(x,y)}f\| \sqrt{(x-x')^2 + y-y')^2}$,

soit $\|f(x,y) - f(x',y')\| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(x-x')^2 + y-y')^2}$, i.e. f est bien contractante de \mathbb{R}^2 dans lui-même, et elle admet un unique point fixe (x,y) tel que

$$\begin{cases} \frac{x\sqrt{2}}{2+x^2+y^2} = x-1 \\ \frac{y\sqrt{2}}{2+x^2+y^2} = y+1 \end{cases} . \text{ Pour calculer}$$

numériquement (x,y) , on utilise la méthode des approximations successives de Picard, i.e. on définit une suite de \mathbb{R}^2 par $(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n, y_n)$, avec (x_0, y_0) quelconque. On sait qu'une telle suite

$$\text{converge vers le point fixe de } f, \text{ i.e. la solution du système } \begin{cases} \frac{x\sqrt{2}}{2+x^2+y^2} = x-1 \\ \frac{y\sqrt{2}}{2+x^2+y^2} = y+1 \end{cases} . \text{ Remarquons}$$

qu'on peut ici ramener le problème à un problème de point fixe dans \mathbb{R} , en choisissant $y_0 = -x_0$:

en effet, si $y_n = -x_n$, alors $y_{n+1} = -1 + \frac{y_n\sqrt{2}}{2+x_n^2+y_n^2} = -1 - \frac{x_n\sqrt{2}}{2+x_n^2+y_n^2} = -x_{n+1}$, donc,

par récurrence, $y_n = -x_n$ pour tout n , et en passant à la limite on trouvera aussi $y = -x$ avec

$1 + \frac{x\sqrt{2}}{2+2x^2} = x$: x est solution de cette équation du troisième degré qui n'a pas de racine évidente (et

$y = -x$). Si on pose $\varphi(x) = 1 + \frac{x\sqrt{2}}{2+2x^2}$, on a à résoudre dans \mathbb{R} le problème de point fixe $\varphi(x) = x$,

avec φ contractante puisque $|\varphi'(x)| = \frac{\sqrt{2}}{2} \left| \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, et on peut trouver

x par la méthode des approximations successives dans \mathbb{R} : $x_0 = 0$ (par exemple), $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. On a

alors $x = \lim_n x_n$ (et $y = -x$). Les premiers termes de la suite sont : $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}, \dots$