

Examen final du 6 février 2003 (suivi de son corrigé)

1. (4 points) Extrema dans  $\mathbb{R}^2$  de la fonction  $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = xy(1 - x^4 - y^4)$ .

2. (6 points) Soit l'application linéaire  $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$   

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \varphi(\vec{X}) = \begin{bmatrix} x + y - 2z \\ x - 2y + z \end{bmatrix} = A\vec{X},$$

$\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$  étant munis des bases canoniques et des structures euclidiennes usuelles. On se propose de déterminer  $\|\varphi\| = \sup_{\|\vec{X}\|=1} \|\varphi(\vec{X})\|$ . Pourquoi est-on sûr que cette borne supérieure existe? Montrer

que  $\|\varphi\|$  est la racine carrée de  $\sup_{\|\vec{X}\|=1} {}^t\vec{X} {}^tAA\vec{X}$ , et, en diagonalisant  ${}^tAA$  dans une base orthonormée

formée de vecteurs propres [qu'il ne sera pas nécessaire d'expliciter], en déduire que  $\|\varphi\|$  est la racine carrée de la plus grande valeur propre de  ${}^tAA$ . Calculer  $\|\varphi\|$ . Retrouver ce résultat par le calcul différentiel (théorème des extrema liés) en cherchant à déterminer le maximum de la forme quadratique  $q(\vec{X}) = {}^t\vec{X} {}^tAA\vec{X}$  sous la contrainte pour  $\vec{X}$  d'appartenir à la sphère-unité.

3. (4 points) Soit  $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$   

$$\left(t, \vec{Y} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \mapsto F(t, \vec{Y}) = \begin{bmatrix} e^{-t}(\sin x + \cos y) \\ e^{-t}(\cos x + \sin y) \end{bmatrix}$$

Calculer la matrice des dérivées partielles  $\left[\frac{\partial F}{\partial \vec{Y}}\right]$  et montrer que l'équation  $F(t, \vec{Y}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  définit au voisinage de  $(0, 0, 0)$  dans  $\mathbb{R}^3$  une fonction implicite  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  dont on donnera un développement limité à l'ordre 3 en  $t = 0$ .

4. (6 points) Soit  $(C)$  la courbe de  $\mathbb{R}^3$  intersection des surfaces :  $\{f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$  (sphère) et  $\{g(x, y, z) = (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0\}$  (cylindre).

Calculer la matrice jacobienne de  $F : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f(x, y, z) \\ g(x, y, z) \end{bmatrix}$  et montrer que  $(C)$  est en tout point,

sauf en  $A(1, 0, 0)$ , une sous-variété de dimension 1 de  $\mathbb{R}^3$ . Donner en particulier des équations et un vecteur directeur de la droite affine tangente à  $(C)$  en  $M_0(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2})$ .

Pour préciser l'allure de la courbe  $(C)$  au voisinage de  $A(1, 0, 0)$ , où le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas, on la paramètre par  $\varphi : [0, 2\pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos^2 t \\ \cos t \sin t \\ \sin t \end{bmatrix}$ .

Vérifier que  $Im(\varphi)$  est bien incluse dans  $(C)$ ; on admettra que réciproquement, tout point de  $(C)$  est un  $\varphi(t)$ , pour un  $t \in [0, 2\pi[$ ; vérifier que  $A(1, 0, 0)$  est l'image de 2 points de  $[0, 2\pi[ : 0$  et  $\pi$ . Calculer  $\overrightarrow{\varphi'(0)}$  et  $\overrightarrow{\varphi'(\pi)}$ , et montrer que  $(C)$  admet en  $A$  deux tangentes dont on donnera des équations.

5. (4 points) Soit l'application  $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $F(x, y) = (\frac{1}{2} \cos(x + y), \frac{1}{2} \sin(x - y))$ . En calculant la norme euclidienne de la matrice jacobienne  $JF$  de  $F$  (rappel : c'est la racine carrée de la plus grande valeur propre de  ${}^t(JF)JF$ ), montrer que  $F$  est contractante de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  et en déduire que le système d'équations  $\begin{cases} \cos(x + y) = 2x \\ \sin(x - y) = 2y \end{cases}$  admet une solution unique dans  $\mathbb{R}^2$ .

Corrigé de l'examen final du 6 février 2003

1. On calcule :  $\overrightarrow{\nabla}_{(x,y)} f = \begin{bmatrix} y(1 - 5x^4 - y^4) \\ x(1 - x^4 - 5y^4) \end{bmatrix}$ , qui n'est nul que pour : a/  $x = 0, y = 0$ , ou b/  $x = 0, 1 - 5x^4 - y^4 = 0$ , soit  $x = 0, y = \pm 1$ , ou c/  $y = 0, 1 - x^4 - 5y^4 = 0$ , soit  $x = \pm 1, y = 0$ , ou enfin d/  $1 - 5x^4 - y^4 = 0, 1 - x^4 - 5y^4 = 0$ , soit (en faisant la somme et la différence de ces deux égalités)  $x = \pm y, y = \pm 6^{-\frac{1}{4}}$ . Il y a donc  $1+2+2+4=9$  points critiques pour  $f$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On calcule alors la matrice hessienne de  $f$  :  $\nabla^2_{(x,y)} f = \begin{bmatrix} -20x^3y & 1 - 5x^4 - 5y^4 \\ 1 - 5x^4 - 5y^4 & -20xy^3 \end{bmatrix}$ .

En  $(0, 0)$ ,  $\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  a pour valeurs propres 1 et  $-1$ , donc  $(0, 0)$  est un point-selle (pas d'extremum); de même en  $(\pm 1, 0)$  et  $(0, \pm 1)$ ,  $\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$  a pour valeurs propres 4 et  $-4$ , donc quatre autres points-selles (pas d'extremum). En revanche, en  $(6^{-\frac{1}{4}}, 6^{-\frac{1}{4}})$  et  $(-6^{-\frac{1}{4}}, -6^{-\frac{1}{4}})$ ,  $\nabla^2 f = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \end{bmatrix}$  a pour valeurs propres  $-\frac{8}{3}$  et  $-4$ , toutes deux négatives, donc deux maxima locaux pour  $f$ , qui vaut en ces points  $\frac{2}{3\sqrt{6}}$ ; et de la même façon, en  $(6^{-\frac{1}{4}}, -6^{-\frac{1}{4}})$  et  $(-6^{-\frac{1}{4}}, 6^{-\frac{1}{4}})$ ,  $\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$  a pour valeurs propres  $\frac{8}{3}$  et 4, toutes deux positives, donc deux minima locaux pour  $f$ , qui vaut en ces points  $-\frac{2}{3\sqrt{6}}$ . Il n'y a pas d'extremum global pour  $f$  dans  $\mathbb{R}^2$  car il est clair qu'en choisissant  $x$  et  $y$  assez grands, on peut rendre  $f(x, y)$  aussi grand que l'on veut, avec le signe que l'on veut (celui de  $-xy$ ).

2.  $\varphi$  est linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$ , donc continue, et la sphère-unité  $S^2 = \{\vec{X}, \|\vec{X}\| = 1\}$ , fermé borné de  $\mathbb{R}^3$ , est compacte. Il en résulte que  $\varphi$  est bornée et atteint ses bornes sur  $S^2$ , en particulier sa borne supérieure  $\|\varphi\|$ . On a :

$$\|\varphi\| = \sup_{\|\vec{X}\|=1} \|\varphi(\vec{X})\| = \sup_{\|\vec{X}\|=1} \sqrt{\|\varphi(\vec{X})\|^2} = \sup_{\|\vec{X}\|=1} \sqrt{{}^t\varphi(\vec{X})\varphi(\vec{X})} = \sup_{\|\vec{X}\|=1} \sqrt{{}^t\vec{X}{}^tAA\vec{X}}$$

Soit  ${}^tAA = {}^tQ\Lambda Q$  une réduction de  ${}^tAA$  à la forme diagonale  $\Lambda$ , de termes diagonaux  $\lambda, \mu, 0$  (tous positifs ou nuls, puisque  ${}^tAA$  est la matrice de la forme quadratique  $\|\vec{A}\vec{X}\|^2$ , positive; 0 est nécessairement valeur propre de  ${}^tAA$ , puisque cette matrice est de rang 2 comme  $A$ ), la matrice  $Q$

étant choisie orthogonale, avec  $Q\vec{X} = \vec{U} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ ; alors  $\|\vec{X}\| = \|Q\vec{X}\| = \|\vec{U}\| = u^2 + v^2 + w^2$ , d'où

$$\|\varphi\| = \sup_{u^2+v^2+w^2=1} \sqrt{{}^t\vec{U}\Lambda\vec{U}} = \sup_{u^2+v^2+w^2=1} \sqrt{\lambda u^2 + \mu v^2 + 0w^2} = \sqrt{\max(\lambda, \mu)}$$
 [la borne supérieure étant clairement atteinte, en supposant par exemple  $\max(\lambda, \mu) = \lambda$ , en  $(u = 1, v = 0, w = 0)$ ], ce

qu'il fallait démontrer. Dans le cas présent,  ${}^tAA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

a pour valeurs propres 0,  $\lambda$  et  $\mu$  solutions de l'équation caractéristique  $\det({}^tAA - xI) = 0$ , qui s'écrit, tous calculs faits,  $x(x^2 - 12x + 27) = 0$ , soit  $\lambda = 9$  et  $\mu = 3$ . Il en résulte que  $\|\varphi\| = 3$ .

Le traitement de la question par le théorème des extrema liés conduit à rechercher la racine carrée du maximum de la fonction  ${}^t\vec{X}^tAA\vec{X}$  sous la contrainte  $\|\vec{X}\|^2 = 1$ . Ce maximum est obtenu pour un  $\vec{X} \in S^2$  et un  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que  $2{}^t\vec{X}^tAA=2\lambda{}^t\vec{X}$  (proportionnalité des gradients), soit  $({}^tAA - \lambda I)\vec{X} = \vec{0}$ , d'où  $\lambda = 9$ , ou  $3$ , ou  $0$ , et  ${}^t\vec{X}^tAA\vec{X} = \lambda{}^t\vec{X}\vec{X} = \lambda$  (pour  $\vec{X} \in S^2$ ) sera maximum pour  $\lambda = 9$ , soit  $3$  pour la racine carrée, et donc  $\|\varphi\| = 3$ .

3. On calcule :  $\left[\frac{\partial F}{\partial \vec{Y}}\right] = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos x & -\sin y \\ -\sin x & \cos y \end{bmatrix}$ , qui en  $(0, 0, 0)$  vaut  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , évidemment inversible, donc d'après le théorème des fonctions implicites, l'équation  $F(t, \vec{Y}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  définit au voisinage de  $(0, 0, 0)$  dans  $\mathbb{R}^3$  une fonction implicite  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ . Remarquons d'abord que cette équation implique que  $x = y$ . En effet, elle s'écrit :  $\sin x + \cos y = e^t = \cos x + \sin y$ , d'où en élevant au carré l'égalité  $\sin x - \cos x = \sin y - \cos y$  :  $\sin 2x = \sin 2y$ , soit  $x = y + k\pi$  ou  $x = \frac{\pi}{2} - y + k\pi$ , et comme  $(x, y)$  est dans un voisinage de  $(0, 0)$ , c'est que  $x = y$ . Il faut donc trouver (puisque  $x$  et  $y$  sont dans un voisinage de  $0$ , le terme constant du développement limité est nul)  $a, b, c$  tels que  $\varphi(t) = \psi(t) = at + bt^2 + ct^3 + o(t^3)$ , avec  $\sin \varphi(t) + \cos \psi(t) = e^t$ , soit  $at + bt^2 + ct^3 - \frac{1}{6}a^3t^3 + 1 - \frac{1}{2}(at + bt^2 + ct^3)^2 = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ . Tous calculs faits, on trouve  $a = 1, b = 1, c = \frac{4}{3}$ , i.e.  $x = \varphi(t) = y = \psi(t) = t + t^2 + \frac{4}{3}t^3 + o(t^3)$ .

4. On calcule :  $J_{(x,y,z)}F = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x-1 & 2y & 0 \end{bmatrix}$ , qui est de rang 2 en tout point où  $z \neq 0$  : en effet pour  $z \neq 0$ , soit  $y \neq 0$  et alors  $rg(J_{(x,y,z)}F) = 2$  car  $\det \begin{bmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ , soit  $y = 0$ , et alors  $x^2 = x$ , d'où ou bien  $x = 1$ , mais alors  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  implique  $z = 0$ , cas exclu, ou bien  $x = 0$ , et alors  $rg(J_{(x,y,z)}F) = 2$  car  $\det \begin{bmatrix} 2x & 2z \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix} = 2z \neq 0$ . En revanche, si  $z = 0, x^2 + y^2 = 1$  et  $x^2 + y^2 - x = 0$ , d'où  $x = 1, y = 0, z = 0$ , et  $J_{(1,0,0)}F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  est de rang 1. Donc d'après le théorème des fonctions implicites,  $F$  est sauf si  $z = 0$ , c'est-à-dire sauf en  $A(1, 0, 0)$ , une submersion et  $(C)$  est en tout point autre que  $A$  une sous-variété de dimension  $3-2=1$  de  $\mathbb{R}^3$ .

L'espace vectoriel tangent en  $M_0$  à  $(C)$ ,  $T_{M_0}C$ , est pour  $M_0 \neq A$  le noyau de la différentielle  $d_{M_0}F$  de la submersion  $F$ , i.e. l'ensemble des vecteurs  $\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  tels que  $J_{M_0}F \cdot \vec{X} = \vec{0}$ , et l'espace affine tangent est l'ensemble des points  $M$  tels que  $J_{M_0}F \cdot \overrightarrow{M_0M} = \vec{0}$ , ce qui peut encore s'écrire :  $\langle \overrightarrow{\nabla_{M_0}f}, \overrightarrow{M_0M} \rangle = 0, \langle \overrightarrow{\nabla_{M_0}g}, \overrightarrow{M_0M} \rangle = 0$ . Soit, dans le cas de  $M_0(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2})$ , 2 équations pour la droite affine tangente à  $(C)$  en  $M_0$  :  $\begin{cases} \frac{3}{2}(x - \frac{3}{4}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y - \frac{\sqrt{3}}{4}) + (x - \frac{1}{2}) = 0 \\ \frac{1}{2}(x - \frac{3}{4}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y - \frac{\sqrt{3}}{4}) = 0 \end{cases}$

Et un vecteur directeur de la tangente  $T_{M_0}C$  sera  $\overrightarrow{\nabla_{M_0}f} \wedge \overrightarrow{\nabla_{M_0}g} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ .

Il est facile de vérifier que  $Im(\varphi)$  est bien incluse dans  $(C)$  : en effet  $(\cos^2 t)^2 + (\cos t \sin t)^2 + \sin^2 t = \cos^4 t + \cos^2 t \sin^2 t + \sin^2 t = \cos^2 + \sin^2 t = 1$  et  $(\cos^2 t - \frac{1}{2})^2 + (\sin t \cos t)^2 - \frac{1}{4} = \cos^4 t - \cos^2 t + \frac{1}{4} + \sin^2 t \cos^2 t - \frac{1}{4} = \cos^2 t - \cos^2 t = 0$ .

Inversement, si l'on ne se contente pas d'"admettre" la surjectivité de  $\varphi$ , utilisons les coordonnées sphériques : pour tout  $(x, y, z)$  de la sphère  $\{f(x, y, z) = 0\}$ , il existe  $u \in ]-\pi, \pi]$  et  $v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  tels

que  $x = \cos u \cos v, y = \sin u \cos v, z = \sin v$ . Mais comme  $g(x, y, z) = 0$  s'écrit aussi  $x^2 + y^2 = x$ , on doit avoir pour tout  $(x, y, z)$  de  $(C)$ ,  $x = \cos u \cos v = \cos^2 v \geq 0$ , donc  $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Il faut donc trouver, pour  $u$  et  $v$  entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ , un  $t \in [0, 2\pi[ \pmod{2\pi}$ , pas nécessairement unique, tel que  $\cos u \cos v = \cos^2 t, \sin u \cos v = \sin t \cos t, \sin v = \sin t$ . Remarquons d'abord que l'égalité  $\cos u \cos v = \cos^2 v$  implique (sauf en  $v = \pm \frac{\pi}{2}$ , où  $u$  n'est pas défini) que  $\cos u = \cos v$ , i.e. que  $u = \pm v$ ; d'autre part l'égalité  $\sin v = \sin t$  implique que  $t = v$  ou  $\pi - v$ . On définit alors  $t$  ainsi :

- pour  $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq 0, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq 0$  (d'où  $u = v$ ) on prend  $t = u = v$ , d'où  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0$
- pour  $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$  (d'où  $u = v$ ), on prend  $t = u = v$ , d'où  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
- pour  $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq 0, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$  (d'où  $u = -v$ ), on prend  $t = \pi - v = \pi + u$ , d'où  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$
- pour  $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq 0$  (d'où  $u = -v$ ), on prend  $t = \pi - v = \pi + u$ , d'où  $\pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$

d'où la surjectivité de  $\varphi$ . Comme  $\varphi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \varphi(\pi)$ ,  $A(1, 0, 0)$  est l'image de 2 points distincts

de  $[0, 2\pi[$  (ou  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ), en lesquels les vecteurs tangents à  $(C)$  sont distincts :  $\overrightarrow{\varphi'(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  et

$\overrightarrow{\varphi'(\pi)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ , d'où par exemple  $\{x=0, y=z\}$  pour des équations de la tangente dirigée par  $\overrightarrow{\varphi'(0)}$

et  $\{x=0, y=-z\}$  pour celles de la tangente dirigée par  $\overrightarrow{\varphi'(\pi)}$ . Cette situation, 2 tangentes distinctes, donc un point double sur  $(C)$ , n'est possible qu'en  $A(1, 0, 0)$ , puisqu'en tout autre point,  $(C)$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$  de dimension 1, donc admet un espace tangent de dimension 1 aussi, c'est-à-dire une (unique) droite tangente. Un tracé de  $(C)$  ferait apparaître un "huit" plaqué sur la sphère-unité, avec sommets aux pôles et un nœud en  $A(1, 0, 0)$ , courbe qui est appelée "fenêtre de Viviani".

**5. On calcule :**  $J_{(x,y)}F = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sin(x+y) & \sin(x+y) \\ \cos(x-y) & -\cos(x-y) \end{bmatrix}$ , d'où

${}^t(J_{(x,y)}F) \cdot J_{(x,y)}F = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sin^2(x+y) + \cos^2(x-y) & \sin^2(x+y) - \cos^2(x-y) \\ \sin^2(x+y) - \cos^2(x-y) & \sin^2(x+y) + \cos^2(x-y) \end{bmatrix}$ , de valeurs propres  $\frac{1}{4}(\sin^2(x+y) + \cos^2(x-y)) \pm \frac{1}{4}(\sin^2(x+y) - \cos^2(x-y)) = \frac{1}{2}\sin^2(x+y)$  et  $\frac{1}{2}\cos^2(x-y)$ , valeurs propres toutes deux majorés par  $\frac{1}{2}$ , donc (voir à ce propos la démonstration du "rappel" en 1.)

$\forall (x, y), \|J_{(x,y)}F\| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ . Il en résulte, en appliquant en toute paire  $(x, y), (x', y')$  de points

de  $\mathbb{R}^2$  la formule des accroissements finis :  $\|F(x, y) - F(x', y')\| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ , que  $F$  est bien contractante de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même; et donc que l'équation  $F(x, y) = (x, y)$ , qui

s'écrit aussi  $\begin{cases} \cos(x+y) = 2x \\ \sin(x-y) = 2y \end{cases}$ , admet bien une solution unique dans  $\mathbb{R}^2$ , dont on pourrait déterminer une valeur approchée par la méthode des approximations successives : c'est la limite de la suite  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}^2$  définie par  $x_0 = 0, y_0 = 0$  (par exemple) et la relation de récurrence  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = F(x_n, y_n)$ , limite dont on peut vérifier que par exemple  $(x_{20}, y_{20})$  en est une valeur approchée à  $10^{-3}$  près.