

Cours de logique mathématique — Exercices sur le calcul des prédicats

exercices à rendre le 18 novembre 2002 : 2, 4, 5, 7, 12, 14, 18, 20.

Langage — Structure

Exercice 1 Les informations suivantes définissent-elles un langage : a) $L = \{R, f, g\}$ avec R symbole de relation et f et g symboles de fonction ; b) $L = \{R, f\}$ avec R et f binaires ?

Exercice 2 Pour chacun des langages suivants, donner deux exemples de structures dans ce langage. a) $L_0 = \{R, f\}$ avec R symbole de relation binaire et f symbole de fonction unaire.

b) $L_1 = \{f, g, h, c\}$ avec f, g symboles de fonction binaires, h symbole de fonction unaire et c symbole de constante.

c) $L_2 = \{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ où les P_n sont des symboles de relation, tous unaires.

Sous-structures

Exercice 3 Soit $L = \{R\}$ avec R symbole de relation binaire et soit \mathcal{M} une L -structure.

a) Soit A un sous-ensemble non vide de M . On voudrait trouver une interprétation R^A de R sur A telle que (A, R^A) soit une sous-structure de \mathcal{M} . Est-ce possible ? A-t-on le choix pour R^A ?

b) On suppose que R^M est une relation d'équivalence sur M (*i.e.* réflexive, symétrique et transitive). Démontrer que si \mathcal{N} est une sous-structure de \mathcal{M} alors R^N est une relation d'équivalence sur N .

Exercice 4 Soit $L = \{f\}$ avec f symbole de fonction unaire et soit \mathcal{M} une L -structure.

a) Soit A un sous-ensemble non vide de M . On voudrait trouver une interprétation f^A de f sur A telle que (A, f^A) soit une sous-structure de \mathcal{M} . À quelle condition est-ce possible ? A-t-on alors le choix pour f^A ?

b) On suppose que f^M est injective. Démontrons que si \mathcal{N} est une sous-structure de \mathcal{M} alors f^N est injective.

c) Soient $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, n \mapsto n+1)$ et $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, n \mapsto n+1)$. Vérifiez que \mathcal{M} et \mathcal{N} sont des L -structures et que \mathcal{N} est une sous-structure de \mathcal{M} . Pensez-vous que dans la question b ci-dessus on pourrait remplacer "injective" par "surjective" ?

Termes — Valeurs

Exercice 5 Soit $L^* = \{R, f, g, h, c\}$ avec R symbole de relation binaire, et les symboles de fonctions : f unaire, g binaire, h ternaire et c symbole de constante. Pour chacune des expressions suivantes : si vous pensez qu'il s'agit d'un terme de L , représentez-le sous forme d'arbre ; si vous pensez le contraire, justifiez votre réponse.

- a) $\forall(x, y)$ b) $\alpha(x, y)$ c) $f(x, y)$ d) $g(x, y)$ e) $R(x, y)$ f) $h(x, y)$ g) (fx)
 h) $f(g(c, y))$ i) $h(x, c, x)$ j) $h(xc, x)$ k) $f(h(x, y, c))$ l) $h(f(x, y, c))$
 m) $g(f(h(x, y, c)), h(f(x), f(y), f(c)))$ n) $f(f(g(x, f(y))))$ o) $g(x, f(h(c, z, g(y, f(v))))))$
 p) $g(g(f(h(x, y, c)), h(f(x), f(y), f(c))), g(x, f(h(c, z, g(y, f(v))))))$

Exercice 6 Un algorithme pour reconnaître les termes :

- dans l'expression étudiée, chaque fois qu'on rencontre une sous-expression de la forme c , $f(x)$, $g(x, y)$ ou $h(x, y, z)$, on la remplace par une variable (p. ex. x)
- on recommence cette opération jusqu'à ce qu'on ne puisse plus.

Alors l'expression de départ est un terme ssi l'expression finale est une variable¹.

Exemples : 1. $f(u, f(g(v, w))) \longrightarrow f(u, f(x)) \longrightarrow f(u, x)$ FIN

2. $f(g(h(y, z, c), g(v, w))) \rightarrow f(g(h(y, z, x), g(v, w))) \rightarrow f(g(x, g(v, w))) \rightarrow f(g(x, x)) \rightarrow f(x) \rightarrow x$.
Appliquer cet algorithme aux expressions de l'exercice précédent pour vérifier vos réponses.

Exercice 7 Soit la L^* -structure $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \geq, n \mapsto n+1, (m, n) \mapsto m.n, (m, n, p) \mapsto m+n+p, 0)$. Pour chaque terme de l'exercice 5, indiquez sa valeur dans la structure \mathcal{N} (utilisez la notation $[m/x; n/y; p/z; q/v]$).

Exercice 8 Soit L un langage sans symbole de constante. On veut démontrer que dans n'importe quel terme t , il y a autant d'occurrences de symboles de fonction que d'occurrences de la parenthèse fermante.

- Qu'en pensez-vous lorsque le terme t est simplement une variable ?
- Supposons que f est un symbole de fonction de L , d'arité $n \geq 1$ et que t_1, \dots, t_n sont des termes tels que : dans chaque t_i ($1 \leq i \leq n$), il y a autant d'occurrences de symboles de fonction que d'occurrences de la parenthèse fermante. Considérons le terme $t = f(t_1, \dots, t_n)$. Quels sont les occurrences de symboles de fonctions de t ? Et celles de la parenthèse fermante ? Déduisez-en que dans t , il y a autant d'occurrences de symboles de fonction que d'occurrences de la parenthèse fermante.
- Concluez que la propriété est vraie pour tous les termes de L (grâce à une démonstration par induction sur les termes).

Exercice 9 Soit le langage $L = \{f, g\}$ avec f et g symboles de fonction unaires.

- Montrez (par induction) que tout terme de L a exactement un occurrence de variable.
- On suppose que \mathcal{M} est une L -structure telle que $f^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}} \circ f^{\mathcal{M}} = g^{\mathcal{M}} \circ g^{\mathcal{M}}$ et $g^{\mathcal{M}} = g^{\mathcal{M}} \circ f^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}} \circ g^{\mathcal{M}}$. Montrez que tout terme de L a pour valeur, dans \mathcal{M} , la fonction identité $id_{\mathcal{M}}$ ou $f^{\mathcal{M}}$ ou $g^{\mathcal{M}}$.
- Même question en supposant que $f^{\mathcal{M}}$ et $g^{\mathcal{M}}$ sont involutives et que $g^{\mathcal{M}} \circ f^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}} \circ g^{\mathcal{M}} = id_{\mathcal{M}}$.

Exercice 10 Soit L un langage quelconque. On définit, par induction sur les termes de L , leur complexité et leur hauteur.

La complexité :
pour les variables : $comp(x) = 0$;
pour les symboles de constante : $comp(c) = 0$;
pour $t = f(t_1, \dots, t_n)$: $comp(t) = 1 + comp(t_1) + \dots + comp(t_n)$.

La hauteur :
pour les variables : $ht(x) = 0$;
pour les symboles de constante : $ht(c) = 0$;
pour $t = f(t_1, \dots, t_n)$: $ht(t) = 1 + \max\{ht(t_1), \dots, ht(t_n)\}$.

- Reprenez les termes de l'exercice 5 et calculez leur complexité et leur hauteur respectives.
- Démontrez (induction) que tout terme a une complexité plus grande que sa hauteur.

Exercice 11 Essayez de définir par induction l'arbre associé à un terme. Une bonne définition doit vous permettre de vérifier la chose suivante (toujours par induction sur les termes) : la hauteur d'un terme est précisément la longueur de la plus grande branche de son arbre. Si votre définition est correcte, essayez de trouver le lien entre l'arbre d'un terme et sa complexité.

Exercice 12 Soit $L = \{f, g, h\}$ un langage comportant trois symboles de fonctions tous binaires. On considère la définition par induction sur les termes de L suivante : $\alpha(t) = 0$ si t est une variable,

¹Cette affirmation se démontre. Il faut montrer chacune des deux implications. \Rightarrow par induction sur les termes, \Leftarrow par récurrence sur le nombre de remplacements effectués

$$\text{et } \alpha(t) = \begin{cases} 1 + \alpha(t_1) + \alpha(t_2), & \text{si } t = f(t_1, t_2) ; \\ \alpha(t_1) + \alpha(t_2), & \text{si } t = g(t_1, t_2) \text{ ou si } t = h(t_1, t_2). \end{cases}$$

a) Démontrez que l'application α est en fait un compteur du nombre d'occurrences du symbole f dans les termes (démonstration par induction).

$$\text{b) Que compte la fonction définie par } \beta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \text{ est une variable ;} \\ 1 + \beta(t_1) + \beta(t_2), & \text{si } t = g(t_1, t_2) ; \\ \beta(t_1) + \beta(t_2), & \text{si } t = f(t_1, t_2) \text{ ou si } t = h(t_1, t_2). \end{cases}$$

c) Proposez une définition par induction de la fonction γ qui à chaque terme t associe le nombre d'occurrences des symboles f et h dans t .

Fomules — Satisfaction

Exercice 13 Soit $L = \{P, R, f, g, c\}$ où les symboles de relation sont P unaire et R binaire et les symboles de fonction sont f unaire, g binaire et c symbole de constante. Pour chacune des expressions suivantes, déterminez s'il s'agit d'une formule de L et dans ce cas représentez son arbre ; ou pas et dans ce cas justifiez.

- a) $\forall(x, y)$ b) $\alpha(x, y)$ c) $g(x, y)$ d) $R(g(x, y))$ e) $P(R(x, y))$ f) $x = g(x, y)$
g) $R(f(x), g(y, c))$ h) $\forall x R(x, x)$ i) $\forall x \exists y R(x, x)$ j) $\exists y (y = c \wedge P(y))$
k) $\exists x (P(f(x)) \wedge \forall y R(x, y))$ l) $(\exists x P(f(x)) \wedge \forall y R(x, y))$ m) $\forall x \forall x P(g(f(x), x))$
n) $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))$.

Exercice 14 Pour chacune des formules de l'exercice précédent, précisez :

- a) si elle est atomique ;
b) pour chaque occurrence de variable, si elle est liée ou libre ;
c) si la fomule est un énoncé ou sinon donnez la liste de ses variables libres.

Exercice 15 Pour chacune des structures des exercices 17 et 18, trouvez dans son langage, une formule atomique et des valeurs pour ses variables telles que la formule est satisfaite. De même trouvez une formule atomique et des valeurs pour ses variables telles que la formule n'est pas satisfaite (p. ex. dans $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \leq)$ on a $\mathcal{N} \models R(x, y)[0/x; 2/y]$).

Exercice 16 Soient ψ_1 et ψ_2 deux formules, dans un langage L , qui ont toutes les deux pour variable libre, au plus, la variable x . Montrez que les formules suivantes sont vraies dans toutes les L -structures :

- a) $(\forall x \psi_1 \leftrightarrow \neg \exists x \neg \psi_1)$;
b) $\forall x (\psi_1 \wedge \psi_2) \leftrightarrow (\forall x \psi_1 \wedge \forall x \psi_2)$;
c) $\exists x (\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow (\exists x \psi_1 \wedge \exists x \psi_2)$.

Exercice 17 Soient $L = \{R\}$ où R est un symbole de relation binaire. Pour chacune des formules suivantes précisez si elle est satisfaite ou pas dans les structures $\mathcal{M}_0 = (\{0; 1; 2; 3\}, \leq)$, $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{N}, \leq)$, $\mathcal{M}_2 = (\mathbb{Z}, \leq)$ et $\mathcal{M}_3 = (\mathbb{R}, \leq)$.

- a) $\exists x (\neg x = y \wedge R(x, y))[0/y]$ b) $\forall x \exists y (R(x, y) \wedge \neg x = y)$ c) $\exists x \forall y R(x, y)$
d) $\forall x \forall y ((R(x, y) \wedge \neg x = y) \rightarrow \exists z ((\neg x = z \wedge \neg y = z) \wedge (R(x, z) \wedge R(z, y))))$.

Exercice 18 Soient $L = \{g, c\}$ où g est un symbole de fonction binaire et c un symbole de constante. Pour chacune des formules suivantes précisez si elle est satisfaite ou pas dans les structures $\mathcal{N}_0 = (\mathbb{Z}, +, 0)$, $\mathcal{N}_1 = (\mathbb{Z}, \times, 1)$, $\mathcal{N}_2 = (\mathbb{R}, \times, 0)$ et $\mathcal{N}_3 = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +, 0)$.

- a) $\forall y g(y, c) = y$ b) $\exists x \exists y (\neg x = c \wedge \neg y = c \wedge g(x, y) = c)$ c) $\forall x \exists y g(y, y) = x$
d) $\forall x \exists y g(x, y) = c.$

Exercice 19 En vous inspirant de l'exercice 10, proposez des définitions (par induction sur les formules) de la hauteur et de la complexité des formules telles qu'on puisse encore démontrer que la complexité est plus grande que la hauteur.

Exercice 20 Soient L un langage, \mathcal{N} une L -structure et \mathcal{M} une sous-structure de \mathcal{N} .

- a) Montrez que si t est un terme de L ayant ses variables parmi \bar{x} et si \bar{a} est un uplet d'éléments de M alors $t^{\mathcal{M}}[\bar{a}/\bar{x}] = t^{\mathcal{N}}[\bar{a}/\bar{x}]$.
b) Montrez que si $\varphi(\bar{x})$ est une formule atomique de L et \bar{a} est un uplet d'éléments de M alors $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/\bar{x}]$ ssi $\mathcal{N} \models \varphi[\bar{a}/\bar{x}]$.
c) Montrez la même chose lorsque $\psi(\bar{x})$ est une formule sans quantificateurs.
d) Montrez que si $\varphi(\bar{x})$ est de la forme $\exists y_1 \dots \exists y_k \psi(\bar{y}, \bar{x})$ avec ψ sans quantificateurs (on dit alors que ψ est existentielle) et si \bar{a} est un uplet d'éléments de M alors : $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/\bar{x}] \Rightarrow \mathcal{N} \models \varphi[\bar{a}/\bar{x}]$.
e) Montrez que si $\varphi(\bar{x})$ est de la forme $\forall y_1 \dots \forall y_k \psi(\bar{y}, \bar{x})$ avec ψ sans quantificateurs (on dit alors que ψ est universelle) et si \bar{a} est un uplet d'éléments de M alors : $\mathcal{N} \models \varphi[\bar{a}/\bar{x}] \Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/\bar{x}]$.
f) Que dire si, dans toutes ces questions, on ne suppose plus que \bar{a} est un uplet d'éléments de M mais seulement de N ?

Cours de logique mathématique — Corrigé des exercices sur le calcul des prédicats

Exercice 2 a) $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, \leq, E)$ où E est l'application partie entière ; $\mathcal{N} = (A, \sim, \pi)$ où A est un ensemble non vide, \sim une relation d'équivalence sur A et π une application qui "choisit" un élément dans chaque classe (*i.e.* pour tout $a \in A$, $a \sim \pi(a)$ et, si $a \sim b$ alors $\pi(a) \sim \pi(b)$).

b) $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, -, 0)$; $\mathcal{N} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \cdot, -, 0)$.

c) Chaque P_n est un symbole de relation unaire donc son interprétation doit être un sous-ensemble de l'ensemble de base : $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, (n\mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}})$ *i.e.* pour chaque entier n , $P_n^{\mathcal{M}}$ est l'ensemble des multiples de n (qui est un sous-ensemble de \mathbb{Z}) ; $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, (\{n\})_{n \in \mathbb{N}})$ *i.e.* pour chaque entier n , $P_n^{\mathcal{N}}$ est le singleton $\{n\}$ (qui est un sous-ensemble de \mathbb{N}).

Exercice 3 a) On voudrait que (A, R^A) soit sous-structure de \mathcal{M} . La seule contrainte est que, pour chaque couple (a, b) d'éléments de A , on ait $(a, b) \in R^A$ ssi $(a, b) \in R^{\mathcal{M}}$. Donc c'est toujours possible car il suffit de prendre $R^A = \{(a, b) \in A \times A : (a, b) \in R^{\mathcal{M}}\} = A \times A \cap R^{\mathcal{M}}$. Mais cela ne laisse aucun choix, pour que (A, R^A) soit sous-structure de \mathcal{M} il faut que R^A soit l'ensemble décrit ci-dessus.

b) On doit montrer que R^A est réflexive, symétrique et transitive, sachant que c'est vrai pour $R^{\mathcal{M}}$ et que \mathcal{N} est sous-structure de \mathcal{M} et donc $R^{\mathcal{N}} = N^2 \cap R^{\mathcal{M}}$:

- (réflexivité) si $a \in N$ alors $(a, a) \in R^{\mathcal{M}}$ et $(a, a) \in N^2$ donc $(a, a) \in R^{\mathcal{N}}$.

- (symétrie) si $a, b \in N$ et $(a, b) \in R^{\mathcal{N}}$ alors $(a, b) \in R^{\mathcal{M}}$ donc $(b, a) \in R^{\mathcal{M}}$. Mais $(b, a) \in N^2$ donc $(b, a) \in R^{\mathcal{N}}$.

- (transitivité) si $a, b, c \in N$ et $(a, b) \in R^{\mathcal{N}}$ et $(b, c) \in R^{\mathcal{N}}$ alors (a, b) et (b, c) sont dans $R^{\mathcal{M}}$ donc $(a, c) \in R^{\mathcal{M}}$. Mais $(a, c) \in N^2$ donc $(a, c) \in R^{\mathcal{N}}$.

Exercice 4 a) On voudrait que (A, f^A) soit sous-structure de \mathcal{M} . On doit donc définir l'application f^A de A dans A avec la contrainte suivante : pour tout $a \in A$, il faut que $f^A(a)$ soit égal à $f^{\mathcal{M}}(a)$. Ceci est possible à condition que chaque élément a de A ait son image par $f^{\mathcal{M}}$ dans A *i.e.* pour tout $a \in A$, $f^{\mathcal{M}}(a) \in A$ ou encore $f^{\mathcal{M}}[A] \subset A$. Si c'est le cas, on n'a pas le choix de f^A : pour que (A, f^A) soit sous-structure de \mathcal{M} , on doit poser, pour tout $a \in A$, $f^A(a) = f^{\mathcal{M}}(a)$ (*i.e.* $f^A = f^{\mathcal{M}}|_A$).

NB. Par exemple pour $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, n \mapsto n + 1)$ et $A = \{\text{entiers négatifs}\}$ (ou $A' = \{\text{entiers pairs}\}$) on ne peut pas trouver d'interprétation de f sur A (ou A') qui convienne car $0 \in A$ mais $f^{\mathcal{M}}(0) \notin A$ (*idem* pour A').

b) Soient a et b dans N distincts. Comme $f^{\mathcal{M}}$ est injective : $f^{\mathcal{M}}(a) \neq f^{\mathcal{M}}(b)$. Or \mathcal{N} est sous-structure de \mathcal{M} donc $f^{\mathcal{N}}$ et $f^{\mathcal{M}}$ coïncident sur N , donc $f^{\mathcal{N}}(a) = f^{\mathcal{M}}(a)$ et $f^{\mathcal{N}}(b) = f^{\mathcal{M}}(b)$. Donc $f^{\mathcal{N}}(a) \neq f^{\mathcal{N}}(b)$.

Ainsi $f^{\mathcal{N}}$ est aussi injective.

c) \mathcal{M} et \mathcal{N} sont des L -structures car ce sont des ensembles non vides munis, chacun, d'une fonction unaire définie sur tout l'ensemble de base : \mathbb{Z} dans un cas, \mathbb{N} dans l'autre (il ne s'agit donc pas de la même fonction). De plus \mathcal{N} est sous-structure de \mathcal{M} car \mathbb{N} est un sous-ensemble de \mathbb{Z} et $f^{\mathcal{N}}$ est la restriction de $f^{\mathcal{M}}$ à \mathbb{N} . Enfin $f^{\mathcal{M}}$ est surjective : tout entier relatif est le successeur d'un entier relatif. Mais ce n'est pas le cas de $f^{\mathcal{N}}$ car 0 n'est pas le successeur d'un entier naturel. Donc la propriété de surjectivité de $f^{\mathcal{M}}$ n'est pas préservée par passage à la sous-structure \mathcal{N} .

NB. Dans la description d'une structure, il n'est pas utile de préciser les ensembles de départ et d'arrivée des fonctions car ils sont implicites : l'interprétation de f d'arité n est une application de M^n dans M . C'est pourquoi on écrit seulement $n \mapsto n + 1$.

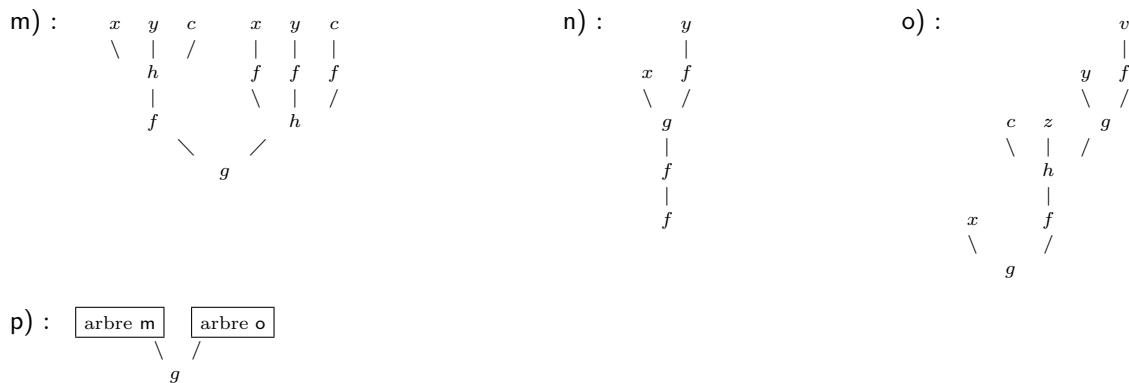
Exercice 5 a), b) et e) : \forall, α et R ne sont pas des symboles de fonction. c) et l) : f est unaire. f) et j) : h est ternaire. g) : le parenthésage est incorrect.

d) :
$$\begin{array}{c} x \quad y \\ \backslash \quad / \\ g(x, y) \end{array}$$

h) :
$$\begin{array}{c} c \quad y \\ \backslash \quad / \\ g(c, y) \\ | \\ f(g(c, y)) \end{array}$$

i) :
$$\begin{array}{c} x \quad c \quad x \\ \backslash \quad | \quad / \\ h(x, c, x) \end{array}$$

k) :
$$\begin{array}{c} x \quad y \quad c \\ \backslash \quad | \quad / \\ h(x, y, c) \\ | \\ f(h(x, y, c)) \end{array}$$



Exercice 7 La valeur d'un terme t dans la structure \mathcal{N} est une fonction $t^{\mathcal{N}}$ dont le nombre d'arguments (tous pris dans $\mathcal{I}\mathcal{N}$) dépend du nombre de variables de t et dont l'ensemble d'arrivée est $\mathcal{I}\mathcal{N}$. Pour décrire cette fonction, on peut utiliser la notation $t^{\mathcal{N}} : \dots \mapsto \dots$ mais, pour nos calculs, il est plus efficace d'écrire $t^{\mathcal{N}}(\dots) = \dots$. Lorsque t a plusieurs variables, il est alors nécessaire de préciser quel argument est affecté à chaque variable. Ici les termes ont leurs variables parmi x, y, z, v . On affectera toujours m à x , n à y , p à z et q à v , ce qui est noté $[m/x, n/y, p/z, q/v]$.

d) Pour $t = g(x, y) : t^{\mathcal{N}}[m/x, n/y] = g(x, y)^{\mathcal{N}}[m/x, n/y] = g^{\mathcal{N}}(m, n) = mn$.

h) $f(g(c, y))^{\mathcal{N}}[n/y] = f^{\mathcal{N}}(g^{\mathcal{N}}(c^{\mathcal{N}}, n)) = f^{\mathcal{N}}(g^{\mathcal{N}}(0, n)) = f^{\mathcal{N}}(0) = 1$.

i) $h(x, c, x)^{\mathcal{N}}[m/x] = h^{\mathcal{N}}(m, c^{\mathcal{N}}, m) = m + 0 + m = 2m$.

k) $f(h(x, y, c))^{\mathcal{N}}[m/x, n/y] = f^{\mathcal{N}}(h^{\mathcal{N}}(m, n, c^{\mathcal{N}})) = 1 + (m + n + 0) = 1 + m + n$.

m) $g(f(h(x, y, c)), h(f(x), f(y), f(c)))^{\mathcal{N}}[m/x, n/y] =$
 $f(h(x, y, c))^{\mathcal{N}}[m/x, n/y] \times h(f(x), f(y), f(c))^{\mathcal{N}}[m/x, n/y] =$
 $(1 + m + n) \times (f^{\mathcal{N}}(x)[m/x, n/y] + f^{\mathcal{N}}(y)[m/x, n/y] + f^{\mathcal{N}}(c)[m/x, n/y]) =$
 $(1 + m + n) \times ((1 + m) + (1 + n) + (1 + c^{\mathcal{N}})) = (1 + m + n)(3 + m + n)$.

n) $f(f(g(x, f(y))))^{\mathcal{N}}[m/x, n/y] = 1 + f(g(x, f(y)))^{\mathcal{N}}[m/x, n/y] = 2 + g(x, f(y))^{\mathcal{N}}[m/x, n/y] =$
 $2 + m \cdot f(y)^{\mathcal{N}}[m/x, n/y] = 2 + m \cdot (n + 1) = mn + m + 2$.

o) $g(x, f(h(c, z, g(y, f(v)))))^{\mathcal{N}}[m/x, n/y, p/z, q/v] = g^{\mathcal{N}}(m, f^{\mathcal{N}}(h^{\mathcal{N}}(c^{\mathcal{N}}, p, g^{\mathcal{N}}(n, f^{\mathcal{N}}(q)))) =$
 $g^{\mathcal{N}}(m, f^{\mathcal{N}}(h^{\mathcal{N}}(0, p, g^{\mathcal{N}}(n, 1 + q)))) = g^{\mathcal{N}}(m, f^{\mathcal{N}}(h^{\mathcal{N}}(0, p, n + nq))) =$
 $g^{\mathcal{N}}(m, f^{\mathcal{N}}(p + n + nq)) = g^{\mathcal{N}}(m, 1 + p + n + nq) = m \cdot (1 + p + n + nq)$

p) $g(g(f(h(x, y, c)), h(f(x), f(y), f(c))), g(x, f(h(c, z, g(y, f(v))))))^{\mathcal{N}}[m/x, n/y, p/z, q/v] =$
 $g^{\mathcal{N}}(g(f(h(x, y, c)), h(f(x), f(y), f(c))), g(x, f(h(c, z, g(y, f(v))))))^{\mathcal{N}}[m/x, n/y, p/z, q/v],$
 $g(x, f(h(c, z, g(y, f(v)))))^{\mathcal{N}}[m/x, n/y, p/z, q/v]) =$
 $g^{\mathcal{N}}((1 + m + n)(3 + m + n), m \cdot (1 + p + n + nq)) = m(1 + m + n)(3 + m + n)(1 + p + n + nq)$.

Exercice 12 a) D'après le cours, ces conditions : $\alpha(t) = 0$, si t est une variable ;
 $1 + \alpha(t_1) + \alpha(t_2)$, si $t = f(t_1, t_2)$;
 $\alpha(t_1) + \alpha(t_2)$, si $t = g(t_1, t_2)$ ou si $t = h(t_1, t_2)$.

définissent une unique application dont l'ensemble de départ est l'ensemble des termes de L (les valeurs de α sont manifestement des nombres entiers mais cela importe peu). Démontrons maintenant, par induction sur les termes, que pour tout L -terme t , $\alpha(t)$ est en fait le nombre d'occurrences du symbole f dans t .

Étape initiale : lorsque t est une variable, $\alpha(t) = 0$ et il n'y a pas d'occurrence du symbole f dans t .

Étape d'induction. Supposons que $t = f(t_1, t_2)$ ou $g(t_1, t_2)$ ou $h(t_1, t_2)$ et que la propriété est vraie pour t_1 et pour t_2 . Les occurrences du symbole f dans t sont celles de t_1 (il y en a $\alpha(t_1)$ par hypothèse d'induction), celles de t_2 (il y en a $\alpha(t_2)$ par hypothèse d'induction) et, dans le cas où $t = f(t_1, t_2)$, le premier symbole de t est une autre occurrence de f . Donc le nombre d'occurrences de f dans t est la somme de $\alpha(t_1)$ et de $\alpha(t_2)$, plus 1 si $t = f(t_1, t_2)$; c'est donc exactement $\alpha(t)$.

Conclusion : la propriété est vraie pour tous les termes de L .

b) L'argument est rigoureusement le même. L'idée est toujours la suivante : on part de 0 sur les variables et, à chaque application d'un symbole de fonction, on fait la somme des valeurs calculées sur les deux termes précédents, mais on ajoute 1 lorsque le symbole de fonction est g . Pensez aux

termes comme à des arbres : aux feuilles on donne la valeur 0, à chaque noeud inférieur on donne la somme des valeurs des noeuds immédiatement au-dessus, plus 1 si ce noeud est une application du symbole g . Alors, à la racine, la valeur correspond au nombre de fois que l'on a appliqué g en descendant dans l'arbre.

c) Une telle application doit valoir 0 sur les variables : $\gamma(t) = 0$ lorsque t est une variable. Lorsque t est construit à partir de t_1 et de t_2 , les occurrences des symboles f et h dans t sont celles de t_1 , celles de t_2 plus une si t est obtenu par application du symbole f ou du symbole h . Donc

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma(t_1) + \gamma(t_2) & \text{si } t = g(t_1, t_2), \\ 1 + \gamma(t_1) + \gamma(t_2) & \text{si } t = f(t_1, t_2) \text{ ou } t = h(t_1, t_2). \end{cases}$$

Exercice 13 a) $\forall(x, y)$ n'est pas une formule car, par exemple, dans une formule, le symbole qui suit un quantificateur est toujours une variable. b) $\alpha(x, y)$ n'est pas une formule car α n'est pas un symbole du langage. c) $g(x, y)$ n'est pas une formule car c'est un terme. d) $R(g(x, y))$ n'est pas une formule car R est un symbole binaire. e) $P(R(x, y))$ n'est pas une formule car $R(x, y)$ n'est pas un terme. f) $x = g(x, y)$ est une formule car x et $g(x, y)$ sont des termes. Son arbre a un seul noeud car c'est une formule atomique. g) $R(f(x), g(y, c))$ est une formule car $f(x)$ et $g(y, c)$ sont des termes et R est binaire. L'arbre a un seul noeud car c'est une formule atomique.

h) $\forall x R(x, x)$ i) $\forall x \exists y R(x, x)$ j) $\exists y (y = c \wedge P(y))$ k) $\exists x (P(f(x)) \wedge \forall y R(x, y))$

formule : formule : est une formule : est une formule :

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{c} R(x, x) \\ | \\ \forall x R(x, x) \end{array} & \begin{array}{c} R(x, x) \\ | \\ \exists y R(x, x) \\ | \\ \forall x \exists y R(x, x) \end{array} & \begin{array}{c} y = c \quad P(y) \\ \backslash \quad / \\ (y = c \wedge P(y)) \\ | \\ \exists y (y = c \wedge P(y)) \end{array} & \begin{array}{c} R(x, y) \\ | \\ \forall y R(x, y) \\ | \\ (P(f(x)) \wedge \forall y R(x, y)) \\ | \\ \exists x (P(f(x)) \wedge \forall y R(x, y)) \end{array} \end{array}$$

l) $(\exists x P(f(x)) \wedge \forall y R(x, y))$ m) $\forall x \forall x P(g(f(x), x))$ n) $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))$

est une formule : est une formule : est une formule :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} P(f(x)) \quad R(x, y) \\ | \quad | \\ \exists x P(f(x)) \quad \forall y R(x, y) \\ \backslash \quad / \\ (\exists x P(f(x)) \wedge \forall y R(x, y)) \end{array} & \begin{array}{c} P(g(f(x), x)) \\ | \\ \forall x P(g(f(x), x)) \\ | \\ \forall x \forall x P(g(f(x), x)) \end{array} & \begin{array}{c} R(x, y) \\ | \\ \exists y R(x, y) \\ | \\ (P(x) \rightarrow \exists y R(x, y)) \\ | \\ \forall x (P(x) \rightarrow \exists y R(x, y)) \end{array} \end{array}$$

Exercice 14 f) et g) sont atomiques, toutes les occurrences de variables y sont donc libres. Donc leurs variables, x et y , sont libres, et ces formules ne sont pas des énoncés.

h), i), j), k), l), m) et n) ne sont pas atomiques : elles comportent des quantificateurs ou des connecteurs. Dans toutes ces formules, toutes les occurrences des variables sont liées sauf une : la seconde occurrence de x dans l). Donc l) a exactement une variable libre : x , et donc l) n'est pas un énoncé. Toutes les autres sont des énoncés : h), i), j), k), m) et n).

NB. L'arbre d'une formule permet de lire si une occurrence d'une variable est liée : sur une feuille (formule atomique) toute occurrence est libre, elle devient liée ssi il y a une quantification sur cette variable sur la branche qui porte cette feuille, *i.e.* en dessous de cette feuille.

Exercice 18 Posons $\psi_a : \forall y g(y, c) = y$, $\psi_b : \exists x \exists y (\neg x = c \wedge \neg y = c \wedge g(x, y) = c)$, $\psi_c : \forall x \exists y g(y, y) = x$ et $\psi_d : \forall x \exists y g(x, y) = c$.

a) Soit \mathcal{N} une L -structure : $\mathcal{N} \models \forall y g(y, c) = y$ ssi pour tout $a \in N$, $g^{\mathcal{N}}(a, c^{\mathcal{N}}) = a$.

Donc : $\mathcal{N}_0 \models \psi_a$ ssi pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a + 0 = a$;

$\mathcal{N}_1 \models \psi_a$ ssi pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a \times 1 = a$;

$\mathcal{N}_2 \models \psi_a$ ssi pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a \times 0 = a$;

$\mathcal{N}_3 \models \psi_a$ ssi pour tout $a \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $a + 0 = a$;

b) De même : $\mathcal{N} \models \exists x \exists y (\neg x = c \wedge \neg y = c \wedge g(x, y) = c)$ ssi il existe $a, b \in N$ tels que $a \neq c^{\mathcal{N}}$, $b \neq c^{\mathcal{N}}$ et $g^{\mathcal{N}}(a, b) = c^{\mathcal{N}}$.

Donc : $\mathcal{N}_0 \models \psi_b$ ssi il existe $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $a + b = 0$;

$\mathcal{N}_1 \models \psi_b$ ssi il existe $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ et $ab = 1$;

$\mathcal{N}_2 \models \psi_b$ ssi il existe $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $ab = 0$;

$\mathcal{N}_3 \models \psi_b$ ssi il existe $a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $a + b = 0$;

c) $\mathcal{N} \models \forall x \exists y g(y, y) = x$ ssi pour tout $a \in N$ il existe $b \in N$ tels que $g^{\mathcal{N}}(b, b) = a$.

Donc : $\mathcal{N}_0 \models \psi_c$ ssi pour tout $a \in \mathbb{Z}$ il existe $b \in \mathbb{Z}$, $b + b = a$;

$\mathcal{N}_1 \models \psi_c$ ssi pour tout $a \in \mathbb{Z}$ il existe $b \in \mathbb{Z}$, $bb = a$;

$\mathcal{N}_2 \models \psi_c$ ssi pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe $b \in \mathbb{R}$, $bb = a$;

$\mathcal{N}_3 \models \psi_c$ ssi pour tout $a \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ il existe $b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $b + b = a$;

d) $\mathcal{N} \models \forall x \exists y g(x, y) = c$ ssi pour tout $a \in N$ il existe $b \in N$ tels que $g^{\mathcal{N}}(a, b) = c^{\mathcal{N}}$.

Donc : $\mathcal{N}_0 \models \psi_d$ ssi pour tout $a \in \mathbb{Z}$ il existe $b \in \mathbb{Z}$, $a + b = 0$;

$\mathcal{N}_1 \models \psi_d$ ssi pour tout $a \in \mathbb{Z}$ il existe $b \in \mathbb{Z}$, $ab = 1$;

$\mathcal{N}_2 \models \psi_d$ ssi pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe $b \in \mathbb{R}$, $ab = 0$;

$\mathcal{N}_3 \models \psi_d$ ssi pour tout $a \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ il existe $b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $a + b = 0$;

Conclusion : $\mathcal{N}_0 \models \psi_a \wedge \psi_b \wedge \neg \psi_c \wedge \psi_d$, $\mathcal{N}_1 \models \psi_a \wedge \psi_b \wedge \neg \psi_c \wedge \neg \psi_d$ et $\mathcal{N}_2 \models \neg \psi_a \wedge \neg \psi_b \wedge \neg \psi_c \wedge \psi_d$. Enfin $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ a pour table d'addition

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Exercice 20 a) Par induction sur les termes de L . Étape initiale : si t est une variable, cette variable est parmi \bar{x} , donc t est un des x_i et alors, pour tout $\bar{a} \in M$, $t^{\mathcal{M}}[\bar{a}/\bar{x}] = a_i$ et $t^{\mathcal{N}}[\bar{a}/\bar{x}] = a_i$. Étape d'induction. Supposons que la propriété est vraie pour t_1, \dots, t_n et que f est un symbole de fonction d'arité n de L . D'abord si $n = 0$ i.e. si f est un symbole de constante, \mathcal{M} est sous-structure de \mathcal{N} donc l'interprétation de f est la même dans \mathcal{M} et dans \mathcal{N} i.e. $f^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{N}}$. Si $n > 0$, considérons $\bar{a} \in M$. D'après l'hypothèse d'induction, pour $1 \leq i \leq n$, $t_i^{\mathcal{M}}[\bar{a}/\bar{x}] = t_i^{\mathcal{N}}[\bar{a}/\bar{x}]$ donc si on pose $b_i = t_i^{\mathcal{M}}[\bar{a}/\bar{x}]$ on a $b_i \in M$ et $b_i = t_i^{\mathcal{N}}[\bar{a}/\bar{x}]$. Alors $t^{\mathcal{M}}[\bar{a}/\bar{x}] = f^{\mathcal{M}}(b_1, \dots, b_n)$ et $t^{\mathcal{N}}[\bar{a}/\bar{x}] = f^{\mathcal{N}}(b_1, \dots, b_n)$. Or \mathcal{M} est sous-structure de \mathcal{N} et $b_1, \dots, b_n \in M$ donc $f^{\mathcal{M}}(b_1, \dots, b_n) = f^{\mathcal{N}}(b_1, \dots, b_n)$, c'est ce qu'on voulait.

b) Si $\varphi(\bar{x})$ est une formule atomique de L , elle est de la forme $R(t_1, \dots, t_m)$ avec t_1, \dots, t_m termes de L en les variables \bar{x} et R symbole m -aire de relation de L . Soit $\bar{a} \in M$, on a : $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/\bar{x}]$ ssi $(t_1^{\mathcal{M}}[\bar{a}/\bar{x}], \dots, t_m^{\mathcal{M}}[\bar{a}/\bar{x}]) \in R^{\mathcal{M}}$ et de même $\mathcal{N} \models \varphi[\bar{a}/\bar{x}]$ ssi $(t_1^{\mathcal{N}}[\bar{a}/\bar{x}], \dots, t_m^{\mathcal{N}}[\bar{a}/\bar{x}]) \in R^{\mathcal{N}}$. D'après la question précédente, pour chaque $1 \leq i \leq m$, on a $b_i = t_i^{\mathcal{M}}[\bar{a}/\bar{x}] = t_i^{\mathcal{N}}[\bar{a}/\bar{x}]$. Et comme \mathcal{M} est sous-structure de \mathcal{N} et $b_1, \dots, b_m \in M$, $(b_1, \dots, b_m) \in R^{\mathcal{M}}$ ssi $(b_1, \dots, b_m) \in R^{\mathcal{N}}$. Donc $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/\bar{x}]$ ssi $\mathcal{N} \models \varphi[\bar{a}/\bar{x}]$.

c) On va procéder par induction sur les formules. On veut montrer : si $\varphi(\bar{x})$ est sans quantificateur alors pour tous $\bar{a} \in M$, $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/\bar{x}]$ ssi $\mathcal{N} \models \varphi[\bar{a}/\bar{x}]$.

Étape initiale : pour les formules atomiques, c'est la question précédente.

Étape d'induction. Soient $\varphi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ deux formules ayant la propriété.

Si $\neg \varphi$ est sans quantificateur, c'est que φ sans quantificateur et alors, par hypothèse d'induction, pour $\bar{a} \in M$, on a $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/\bar{x}]$ ssi $\mathcal{N} \models \varphi[\bar{a}/\bar{x}]$ et donc $\mathcal{M} \models \neg \varphi[\bar{a}/\bar{x}]$ ssi $\mathcal{N} \models \neg \varphi[\bar{a}/\bar{x}]$.

De même pour $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ et $(\varphi \leftrightarrow \psi)$: si elles ne contiennent pas de quantificateur alors φ et ψ non plus et, par hypothèse d'induction, pour tous $\bar{a} \in M$, $\varphi[\bar{a}/\bar{x}]$ a la même valeur dans \mathcal{M} et dans \mathcal{N} ; ainsi que $\psi[\bar{a}/\bar{x}]$. C'est donc aussi le cas pour $(\varphi \wedge \psi)[\bar{a}/\bar{x}]$, $(\varphi \vee \psi)[\bar{a}/\bar{x}]$, $(\varphi \rightarrow \psi)[\bar{a}/\bar{x}]$ et $(\varphi \leftrightarrow \psi)[\bar{a}/\bar{x}]$.

Enfin pour $\exists x_i \varphi$ et $\forall x_i \varphi$, il n'y a rien à montrer car elles ne sont pas sans quantificateur.

d) On a $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/\bar{x}]$ i.e. $\mathcal{M} \models \exists \bar{y} \psi(\bar{y}; \bar{x})[\bar{a}/\bar{x}]$, donc il existe $\bar{b} \in M$ tels que $\mathcal{M} \models \psi(\bar{y}; \bar{x})[\bar{b}/\bar{y}, \bar{a}/\bar{x}]$.

Or ψ est sans quantificateur et \bar{a}, \bar{b} sont dans M donc, d'après la question précédente, on a aussi $\mathcal{N} \models \psi(\bar{y}; \bar{x})[\bar{b}/\bar{y}, \bar{a}/\bar{x}]$ et donc $\mathcal{N} \models \exists \bar{y} \psi(\bar{y}; \bar{x})[\bar{a}/\bar{x}]$ i.e. $\mathcal{N} \models \varphi[\bar{a}/\bar{x}]$.

e) On peut contraposer le résultat de la question précédente (car la négation d'une formule uni-

verselle est existentielle), mais on va faire la preuve directe. On suppose que $\mathcal{N} \models \forall \bar{y} \psi(\bar{y}; \bar{x})[\bar{a}/\bar{x}]$ et on veut voir que \mathcal{M} satisfait aussi cette formule *i.e.* que, pour tous $\bar{b} \in M$, $\mathcal{M} \models \psi[\bar{b}/\bar{y}, \bar{a}/\bar{x}]$. Or, pour $\bar{b} \in M$, on a $\mathcal{N} \models \psi[\bar{b}/\bar{y}, \bar{a}/\bar{x}]$ et comme \bar{a}, \bar{b} sont dans M et ψ est sans quantificateur, d'après la question c, on a bien $\mathcal{M} \models \psi[\bar{b}/\bar{y}, \bar{a}/\bar{x}]$.

NB. Dans l'exercice 4, la propriété “ f injective” est un énoncé universel : $\forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$ et on a bien vérifié qu'elle est préservée par passage aux sous-structures.

f) Si on ne se restreint pas au cas où les \bar{a} sont dans M , les questions n'ont plus de sens : la satisfaction de $\varphi[\bar{a}/\bar{x}]$ par \mathcal{M} n'a de sens que pour \bar{a} dans M .