

Examen partiel du 16 décembre 1999

Préambule ne faisant l'objet d'aucune question, mais pouvant être utile dans les exercices **1.** et **6.** :
On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan } x$ est l'unique réel y qui est compris strictement entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, et tel que $\tan y = x$ (ainsi exemple $\text{Arctan } 1 = \frac{\pi}{4}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan } x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan } x = -\frac{\pi}{2}$).
De la formule $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$ on déduit en posant $\text{Arctan } x = \alpha$, $\text{Arctan } y = \beta$, que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan } x - \text{Arctan } y = \text{Arctan } \frac{x - y}{1 + xy}$. La fonction Arctan est définie sur \mathbb{R} tout entier, impaire, et bijective de \mathbb{R} dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, de dérivée donnée par $(\text{Arctan})'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$. De la valeur de cette dérivée, on déduit avec un peu de calculs que : 1/ $\text{Arctan } x = x + o(x)$ au voisinage de 0 ; 2/ $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\text{Arctan } x| \leq |x|$; 3/ $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\text{Arctan } x + \text{Arctan } \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \text{sgn}(x)$, où sgn est la fonction signe, qui vaut 1 pour $x > 0$ et -1 pour $x < 0$.

1. (4 points) Soit la fonction de la variable réelle x définie par $f_n(x) = x \text{Arctan } nx$. Déterminer, pour x réel fixé, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniforme sur \mathbb{R} . Examiner la convergence de la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (en commençant par calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ pour tout x réel). Montrer qu'elle ne peut converger uniformément dans aucun intervalle ouvert contenant 0.

2. (3 points) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n} + (-1)^n}$?
(Indication : on pourra calculer $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n} + (-1)^n}$)

3. (3 points) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \sin \pi \sqrt{n^2 + 1}$? (On pourra utiliser un développement limité en $\frac{1}{n}$ de $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$ et une formule de trigonométrie élémentaire)

4. (3 points) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \alpha^n$, avec $\alpha > 0$? (Discuter suivant la valeur de α .)

5. (3 points) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n)}$, avec $\alpha > 0$? (Utiliser la règle de Raabe et Duhamel.)

6. (3 points) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Arctan} \frac{1}{1+n+n^2}$? Calculer la somme de la série (commencer par calculer $\operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan} n$).

7. (5 points) On définit pour tout x réel: $u_n(x) = \frac{e^{inx}}{(n^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Montrer que la série de fonctions

$\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur \mathbb{R} ; en déduire que sa somme S est une fonction continue sur \mathbb{R} .

Calculer la dérivée u'_n de u_n ; montrer, en étudiant les variations de la fonction $g_n : x \mapsto \frac{x}{n^2 + x^2}$, que

$\forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{x}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{2n}$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, |u'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{3}{2n^4}$, puis, que la série $\sum_{n \geq 1} u'_n(x)$

converge normalement sur \mathbb{R} et que S est une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Corrigé de l'examen partiel du 16 décembre 1999

1. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan } x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan } x = -\frac{\pi}{2}$ on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} x \text{Arctan } nx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

(= $\frac{\pi}{2}|x|$). Soit donc f la fonction $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ainsi définie sur \mathbb{R} .

Si $x = 0$, $|f(x) - f_n(x)| = 0$;

si $x > 0$, $|f(x) - f_n(x)| = x \left| \frac{\pi}{2} - \text{Arctan } nx \right| = x \text{Arctan } \frac{1}{nx} \leq x \frac{1}{nx} = \frac{1}{n}$;

si $x < 0$, $|f(x) - f_n(x)| = |x| \left| \frac{\pi}{2} + \text{Arctan } nx \right| = |x| \left| \frac{\pi}{2} - \text{Arctan } n|x| \right| = |x| \left| \text{Arctan } \frac{1}{n|x|} \right| \leq |x| \frac{1}{n|x|} = \frac{1}{n}$

Donc dans tous les cas, $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$, uniformément en $x \in \mathbb{R}$ lorsque $n \rightarrow \infty$: la convergence des f_n vers f est bien uniforme sur \mathbb{R} .

La dérivée de f_n est donnée par : $f'_n(x) = \text{Arctan } nx + \frac{nx}{1+n^2x^2}$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arctan } nx = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$, $-\frac{\pi}{2}$ si $x < 0$, et 0 si $x = 0$, et que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$ pour

tout x fixé, on obtient : $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Cette fonction est discontinue en 0 : donc la convergence des f'_n ne peut être uniforme sur aucun intervalle ouvert contenant 0, sinon la fonction $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$ serait continue en 0.

2. On a : $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n [n + (-1)^n - n]}{n\sqrt{n}(n\sqrt{n} + (-1)^n)} = \frac{1}{n^3 + (-1)^n n\sqrt{n}}$

Pour tout $n \geq 2$, $n^3 + (-1)^n n\sqrt{n} \geq 0$, donc $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^3 + (-1)^n n\sqrt{n}}$ est une série à termes réels po-

sitifs dont le terme général est équivalent à $\frac{1}{n^3}$ à l'infini, donc elle converge. Comme d'autre part

$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ (série alternée) est convergente, $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n} + (-1)^n} = \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} - \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^3 + (-1)^n n\sqrt{n}}$

différence de deux séries convergentes, est convergente.

3. Le développement limité $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ au voisinage de 0 permet d'écrire :

$\sin \pi \sqrt{n^2+1} = \sin \pi n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sin \pi n \left(1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^3} \varepsilon \left(\frac{1}{n}\right)\right)$ (où $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon \left(\frac{1}{n}\right) = 0$), d'où :

$\sin \pi \sqrt{n^2+1} = \sin \left(\pi n + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n^2} \varepsilon \left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sin \pi n \cos \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n^2} \varepsilon \left(\frac{1}{n}\right)\right) + \cos \pi n \sin \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n^2} \varepsilon \left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$= (-1)^n \sin \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n^2} \varepsilon \left(\frac{1}{n}\right)\right) = (-1)^n \frac{\pi}{2n} + (-1)^n \frac{\pi}{n^2} \varepsilon_1 \left(\frac{1}{n}\right)$ (où $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_1 \left(\frac{1}{n}\right) = 0$), d'où :

$\left| \sin \pi \sqrt{n^2 + 1} - (-1)^n \frac{\pi}{2n} \right| \leq \frac{\pi}{n^2}$ et donc $\sum_{n \geq 1} \sin \pi \sqrt{n^2 + 1}$ est somme d'une série alternée et d'une série absolument convergente : donc elle converge.

4. Ici la règle de d'Alembert s'impose :

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{(n+1) \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)} \right] \alpha = \alpha$, donc : si $\alpha < 1$, la série converge, et si $\alpha > 1$, la série diverge ; enfin si $\alpha = 1$, le terme général de la série est $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \geq 1$, qui ne peut tendre vers 0, et la série diverge dans ce cas aussi.

5. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{\alpha + n + 1} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{n+1}} = 1 - \frac{\alpha}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc, d'après la règle de Raabe et Duhamel (par comparaison avec une série de Riemann), la série converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha < 1$; enfin le cas $\alpha = 1$ donne la série harmonique, qui diverge.

6. Pour $n \rightarrow \infty$, $\text{Arctan} \frac{1}{1+n+n^2} \sim \text{Arctan} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum_{n \geq 0} \text{Arctan} \frac{1}{1+n+n^2}$ converge. Pour calculer la somme de cette série, calculons d'abord : $\text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan} n = \text{Arctan} \frac{n+1-n}{1+(n+1)n} = \text{Arctan} \frac{1}{1+n+n^2}$ d'où :

$$\sum_{n \geq 0} \text{Arctan} \frac{1}{1+n+n^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \text{Arctan} \frac{1}{1+n+n^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N [\text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan} n] = \lim_{N \rightarrow \infty} [\text{Arctan} 1 + \text{Arctan} 2 - \text{Arctan} 1 + \dots + \text{Arctan} N - \text{Arctan}(N-1) + \text{Arctan}(N+1) - \text{Arctan} N] = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Arctan}(N+1) = \frac{\pi}{2}$$

7. $\forall x \in \mathbb{R}, |u_n(x)| \leq \frac{1}{(n^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{n^3}$, terme général d'une série convergente. Donc, comme les u_n sont continues sur \mathbb{R} , et que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur \mathbb{R} la somme S de cette série de fonctions est une fonction continue sur \mathbb{R} . De plus :

$$u'_n(x) = \frac{ine^{inx}}{(n^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3xe^{inx}}{(n^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \implies |u'_n(x)| \leq \frac{n}{(n^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{|x|}{n^2 + x^2} \frac{3}{(n^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Étudions les variations de la fonction $g_n : x \mapsto \frac{x}{n^2 + x^2}$: elle a pour dérivée $g'_n : x \mapsto \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}$ qui ne s'annule

sur \mathbb{R}_+ qu'en $x = n$, où g_n présente un maximum égal à $\frac{n}{n^2 + n^2} = \frac{1}{2n}$; de plus g_n est impaire, et

donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |g_n(x)| = \frac{1}{2n}$. D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, |u'_n(x)| \leq \frac{n}{n^3} + \frac{1}{2n} \frac{3}{n^3} = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{2n^4}$: la

série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u'_n$ est donc normalement convergente sur \mathbb{R} . Il en résulte que : 1/ les u'_n étant

continues et la convergence de $\sum_{n \geq 1} u'_n$ uniforme sur \mathbb{R} , $\sum_{n \geq 1} u'_n$ est continue sur \mathbb{R} ; 2/ $S = \sum_{n \geq 1} u_n$ est

dérivable en tout point de \mathbb{R} , de dérivée $S' = \sum_{n \geq 1} u'_n$ continue, i.e. $S = \sum_{n \geq 1} u_n$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .