UNIVERSITÉ PARIS VIII **SÉRIES**
DEUG MIAS **2003-2004**

Examen partiel du 17 décembre 2003

1. (4 points) Nature des séries : a/ $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; b/ $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2 e^{-n}$.

2. (6 points) On se propose de calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2 e^{-n}$, et pour cela on considère la série de fonctions $f(x)=\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-nx}$: montrer qu'elle converge normalement sur tout intervalle $[a,+\infty]$, avec $a>0$, et qu'elle est deux fois dérivable sur $[a,+\infty]$ (justifier les calculs à l'aide des théorèmes du cours). Calculer $f(x),\ f'(x)$ et$f''(x)$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2 e^{-n}$.

3. (4 points) Exprimer $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n}$ (où $\left[\frac{n}{2}\right]$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$, i.e. le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$) à l'aide de $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ et de $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+2}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n}$ converge et calculer sa somme (on rappelle que pour $a>0, b\geq 0$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{a+nb}=\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt$).

4. (4 points) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^{2n}e^{-nx^2}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et calculer sa somme $S(x)$. Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $S'(x)$ et en déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n2^n e^{-2n}$.

5. (6 points) Montrer que la série de fonctions $f(x)=\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\operatorname{Arc}\tan nx}{n^2}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et que sa somme est impaire. Montrer qu'elle est continûment dérivable sur toute partie de $\mathbb{R}$ de la forme $\{|x|\geq a\}$ (où $a>0$). Que dire de $f'(x)$ lorsque $x\longrightarrow 0$? Montrer que $f''(x)$ existe sur toute partie de la forme $\{|x|\geq a\}$ de $\mathbb{R}$, que f est convexe sur $\mathbb{R}^*_-$ et concave sur $\mathbb{R}^*_+$. Tracer sommairement le graphe de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'examen partiel du 17 décembre 2003

1. a/ Lorsque $n \longrightarrow +\infty$, $1 - e^{-\frac{1}{n}} \approx \dfrac{1}{n}$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \approx \dfrac{1}{n}$ donc $\left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \approx \dfrac{1}{n^2}$ et donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge.

b/ Ici, le critère de d'Alembert donne : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{(n+1)^2e^{-n-1}}{n^2e^{-n}} = \frac{1}{e} < 1$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2e^{-n}$ converge.

2. Pour $x \geq a > 0$, $e^{-nx} \leq e^{-na} = \left(e^{-a}\right)^n$, terme général d'une série géométrique convergente, donc la série de fonctions $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-nx}$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$, si $a > 0$.
La somme f de la série, qui est pour tout x une série géométrique, se calcule sans peine : $\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x - 1}$. La série des dérivées $-\displaystyle\sum_{n\geq 0} ne^{-nx}$ et la série des dérivées secondes $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2e^{-nx}$ convergent aussi normalement sur $[a, +\infty[$, puisque $ne^{-nx} \leq ne^{-na}$ et $n^2e^{-nx} \leq n^2e^{-na}$ et que pour $n \longrightarrow +\infty$, $\dfrac{(n+1)e^{-(n+1)a}}{ne^{-na}} \longrightarrow e^{-a} < 1$ et $\dfrac{(n+1)^2e^{-(n+1)a}}{n^2e^{-na}} \longrightarrow e^{-a} < 1$ (critère de d'Alembert). Donc, la série des dérivées et la série des dérivées secondes convergeant uniformément sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$, f est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ ($a > 0$ pouvant être choisi aussi proche de 0 que l'on veut, la convergence a en fait lieu sur $\mathbb{R}^*$), et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\displaystyle\sum_{n\geq 0} ne^{-nx}$, et $f''(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2e^{-nx}$.
On calcule $f'(x)$ et $f''(x)$ en dérivant (pour $x > 0$) la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x - 1}$: $f'(x) = -\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$ et $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{2x}}{(e^x-1)^3}$, d'où : $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2e^{-n} = f''(1) = \frac{e+e^2}{(e-1)^3}$.

3. Pour $n = 2k$ ou $2k+1$, on a $\left[\dfrac{n}{2}\right] = k$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n} = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1} + \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{2k}$

$$= \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+2} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = [\mathrm{Arc}\tan t]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

4. Une étude des variations de la fonction $x \mapsto x^2e^{-x^2}$ montre qu'elle est paire et que sur $\mathbb{R}_+$, sa dérivée $x \mapsto 2x(1-x^2)e^{-x^2}$ est positive entre 0 et 1, négative pour $x > 1$, avec un maximum égal à $\dfrac{1}{e}$ en $x = 1$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^{2n}e^{-nx^2} \leq e^{-n}$, terme général d'une série géométrique convergente. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^{2n}e^{-nx^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(x^2e^{-x^2}\right)^n = \frac{1}{1 - x^2e^{-x^2}}$.
De même on peut majorer terme à terme la série des dérivées $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 2x(1-x^2)e^{-x^2}n\left(x^2e^{-x^2}\right)^{n-1}$

$=\sum_{n\geq 0} 2x(1-x^2)e^{-x^2}(n+1)\left(x^2e^{-x^2}\right)^n$: d'une part $x^2e^{-x^2}$ est borné sur $\mathbb{R}$ par $\frac{1}{e}$, d'autre part $\forall x\in\mathbb{R}$, $|2x|\leq 1+x^2$ (puisque $(1-|x|)^2\geq 0$) et $|1-x^2|\leq 1+x^2$, donc $|2x(1-x^2)|\leq(1+x^2)^2$ et donc $|2x(1-x^2)e^{-x^2}|\leq(1+x^2)^2e^{-x^2}=e^{-x^2}+2x^2e^{-x^2}+x^4e^{-x^2}=e^{-x^2}+2x^2e^{-x^2}+4\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]^2$ $\leq 1+\frac{2}{e}+\frac{4}{e^2}=M$, donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $|2x(1-x^2)e^{-x^2}(n+1)\left(x^2e^{-x^2}\right)^n|\leq M(n+1)e^{-n}$, terme général d'une série convergente (critère de d'Alembert, par exemple), donc comme la série des dérivées $\sum_{n\geq 0} 2x(1-x^2)e^{-x^2}n\left(x^2e^{-x^2}\right)^{n-1}$ est normalement convergente, S est dérivable terme à terme sur $\mathbb{R}$, i.e. $S'(x)$ est égale à la somme de la série des dérivées : $S'(x)=\frac{2(1-x^2)}{x}\sum_{n\geq 0} n\left(x^2e^{-x^2}\right)^n$, et en faisant $x=\sqrt{2}$, on obtient, puisque par ailleurs $S'(x)=\left(\frac{1}{1-x^2e^{-x^2}}\right)'=\frac{2x(1-x^2)e^{-x^2}}{\left(1-x^2e^{-x^2}\right)^2}$:

$$\sum_{n\geq 0} n2^ne^{-2n}=\frac{x}{2(1-x^2)}S'(x)\Big|_{x=\sqrt{2}}=\frac{x}{2(1-x^2)}\left(\frac{2x(1-x^2)e^{-x^2}}{\left(1-x^2e^{-x^2}\right)^2}\right)\Bigg|_{x=\sqrt{2}}=\frac{2e^{-2}}{\left(1-2e^{-2}\right)^2}.$$

5. $\forall x\in\mathbb{R}$, $|\operatorname{Arc\,tan} x|\leq\frac{\pi}{2}$, donc $\frac{|\operatorname{Arc\,tan} nx|}{n^2}\leq\frac{\pi}{2n^2}$, terme général d'une série convergente, donc cette série de fonctions est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, et sa somme est impaire comme chacun des ses termes. Sur toute partie de $\mathbb{R}$ de la forme $\{|x|\geq a\}$, où $a>0$, la série des dérivées $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(1+n^2x^2)}\leq\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(1+n^2a^2)}\leq\frac{1}{a^2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$ est normalement convergente, et donc $f'(x)$ existe pour tout $x\neq 0$. Mais cette majoration ne tient plus en 0 (i.e. si on ne suppose plus $|x|\geq a>0$) : $\lim_{x\longrightarrow 0}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(1+n^2x^2)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ devient aussi grand qu'on veut pour $N\longrightarrow+\infty$, i.e. $\lim_{x\longrightarrow 0} f'(x)=+\infty$: le graphe de f admet en 0 une tangente verticale (à la différence de $x\mapsto\operatorname{Arc\,tan} x$, qui a en 0 une tangente de pente 1).

La série des dérivées secondes $\sum_{n\geq 1}\frac{-2nx}{(1+n^2x^2)^2}$ converge aussi normalement sur toute partie de la forme $\{|x|\geq a\}$ de $\mathbb{R}$ (où $a>0$), puisque $1+n^2x^2-2n|x|=(1-n|x|)^2\geq 0$, donc $\frac{2n|x|}{1+n^2x^2}\leq 1$ et $\frac{2n|x|}{(1+n^2x^2)^2}\leq\frac{1}{1+n^2x^2}\leq\frac{1}{1+n^2a^2}\leq\frac{1}{a^2n^2}$, donc $f''(x)$ existe pour tout $x\neq 0$, et $f''(x)>0$ pour $x<0$, $f''(x)<0$ pour $x>0$ (comme chacun des termes de la somme). Il en résulte que f est convexe (i.e. le graphe de f tourne sa concavité vers le haut) pour $x<0$, et concave (i.e. le graphe de f tourne sa concavité vers le bas) pour $x>0$. Le tracé (approximatif) du graphe de f ne présente pas de difficulté : fonction impaire, donc symétrie par rapport à l'origine, où la courbe admet une tangente verticale, convexité sur $\mathbb{R}_-$ et concavité sur $\mathbb{R}_+$, asymptotes horizontales $y=\pm\frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ pour $x\longrightarrow\pm\infty$ (en effet, par continuité de f, le passage à la limite pour $x\longrightarrow\pm\infty$ à l'intérieur du signe $\sum$ est justifié). Pour préciser des valeurs numériques pour le tracé, on peut calculer (à la calculatrice programmable ou à l'ordinateur) : $\frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\approx 2.7$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=1.12,\ f(1)\approx 1.6,\ f(2)\approx 2,\ f(4)\approx 2.3,\ldots$