

Examen final (2^e session) du 16 septembre 1997

1. (2 points) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 0} (\sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4 + 2n})$?

(utiliser l'identité : $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$ et comparer avec une série de Riemann)

2. (4 points) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge (comparer avec une série de Riemann). Montrer que $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$; en déduire la somme de la série en l'exprimant comme différence des sommes de deux séries.

3. (6 points) a/ Soit la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$
$$x \mapsto \frac{e^{2x}}{1-x}.$$

On rappelle que la fonction exponentielle est développable en série entière dans \mathbb{C} tout entier et que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$ pour $|x| < 1$; f est ainsi développable en série entière pour $|x| < 1$. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ son développement : $\forall x \in D(0, 1)$, $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. On se propose de déterminer les $(a_n)_{n \geq 0}$.

a/ Montrer que pour $|x| < 1$, $e^{2x} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n - \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1}$.

b/ En déduire que $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!} x^n = a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n - a_{n-1}) x^n$ et que : $a_0 = 1$, et $\forall k \geq 1$, $a_k - a_{k-1} = \frac{2^k}{k!}$

c/ En sommant les égalités obtenues pour $k = 1, 2, \dots, n$, en déduire que : $\forall n \geq 0$, $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!}$

4. (8 points + 4 points de bonus au b/(ii)) Soit f définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par : $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

(f est donc la primitive de $e^{-\frac{x^2}{2}}$ qui s'annule en $x = 0$).

a/ Développer en série entière $e^{-\frac{x^2}{2}}$ et en déduire par intégration le développement en série entière de $f(x)$. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

b/ On se propose de calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de $f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

(i) Exprimer ce nombre comme somme d'une série à l'aide du a/ et montrer qu'il s'agit d'une série alternée, i.e. de la forme $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$, avec $(u_n)_{n \geq 0}$ positive et décroissante.

(ii) On pourra admettre (mais c'est facile à démontrer, et il y a 4 points de bonus pour une démonstration correcte de ce résultat élémentaire) que le reste à l'ordre p d'une série alternée $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ est inférieur en valeur absolue à la valeur absolue du premier terme négligé, soit u_{p+1} , c'est-à-dire :

$$(u_n)_{n \geq 0} \text{ positive décroissante} \Rightarrow \left| \sum_{p+1}^{\infty} (-1)^n u_n \right| \leq u_{p+1}.$$

Montrer que le reste d'ordre 1 (i.e. la somme de 2 à $+\infty$) de la série trouvée en (i) est inférieur à 10^{-3} , et en déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de $f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.