

**Examen final du 4 février 2004**

1. (4 points) Nature des séries : a/  $\sum_{n \geq 0} (\sqrt{n^3 + n + 1} - \sqrt{n^3 + n})$  ; b/  $\sum_{n \geq 1} (\cos \frac{\pi}{n} - e^{\frac{1}{n^2}})$ .

2. (4 points) Développer en série entière la fonction  $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  (Indication : dériver ; on rappelle aussi que  $(1+x)^\alpha = \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$ ).

3. (5 points) On se propose de développer en série entière la fonction  $J$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin t) dt$ . On admettra pour cela le calcul (qui s'obtient par une récurrence sur

l'entier  $k$ ) de l'intégrale de Wallis :  $\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} t dt = \frac{1.3.5 \dots (2k-1)}{2.4.6 \dots 2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2}$ . Montrer que

$J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} \sin^{2k} t}{(2k)!} \right) dt$ . Si on peut justifier la permutation des symboles  $\sum_{k=0}^{+\infty}$  et  $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ ,

on obtiendra bien, à l'aide du calcul de l'intégrale de Wallis, le développement cherché. Pour cela, on rappelle que  $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh x < +\infty$  : il en résulte que le reste  $\sum_{N+1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$  de cette série peut

être rendu aussi petit que l'on veut à condition de choisir  $N$  assez grand. En déduire que pour tout  $x$  fixé et tout  $\varepsilon > 0, \exists N$  tel que  $\forall t, \left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^{2k} \sin^{2k} t}{(2k)!} \right| \leq \frac{2\varepsilon}{\pi}$ , d'où  $\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} \sin^{2k} t}{(2k)!} \right) dt \right| \leq \varepsilon$ .

En déduire que  $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^k x^{2k} \sin^{2k} t}{(2k)!} dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^k x^{2k} \sin^{2k} t}{(2k)!} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin t) dt$

(utiliser la définition de la limite), ce qui justifie la permutation de  $\sum_{k=0}^{+\infty}$  et  $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ , et donner le développement en série entière de  $J(x)$ .

4. (5 points) Soit  $f$  définie, pour  $x \in \mathbb{R}$ , par :  $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

( $f$  est donc la primitive de  $e^{-\frac{x^2}{2}}$  qui s'annule en  $x = 0$ ).

a/ Développer en série entière  $e^{-\frac{x^2}{2}}$  et en déduire par intégration le développement en série entière de  $f(x)$ . Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

b/ On se propose de calculer une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

(i) Exprimer ce nombre comme somme d'une série à l'aide du a/ et montrer qu'il s'agit d'une série alternée, i.e. de la forme  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ , avec  $(u_n)_{n \geq 0}$  positive et décroissant vers 0.

(ii) On rappelle que le reste à l'ordre  $p$  d'une série alternée  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$  est inférieur en valeur absolue à la valeur absolue du premier terme négligé, soit  $u_{p+1}$ , c'est-à-dire :

$$(u_n)_{n \geq 0} \text{ positive décroissant vers } 0 \Rightarrow \left| \sum_{p+1}^{\infty} (-1)^n u_n \right| \leq u_{p+1}.$$

Montrer que le reste d'ordre 1 (i.e. la somme de 2 à  $+\infty$ ) de la série trouvée en (i) est inférieur à  $10^{-3}$ , et en déduire une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

**5. (8 points)** On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n \sin nx}{n}$

a/ Montrer, à l'aide du "critère d'Abel uniforme" (avec  $v_n = \frac{1}{n}$  et  $\varepsilon_n(x) = x^n \sin nx$ ) qu'elle converge

uniformément sur  $[-1, 1]$ . (N.B. : pour vérifier que les sommes partielles  $\left| \sum_{n=0}^N x^n \sin nx \right| = \left| \Im \sum_{n=0}^N x^n e^{inx} \right|$

$\leq \left| \sum_{n=0}^N x^n e^{inx} \right|$  sont bornées uniformément en  $x$ , on pourra vérifier que la fonction :  $x \mapsto 1 - x e^{ix}$  ne

s'annule jamais sur  $\mathbb{R}$ , et que donc la fonction :  $x \mapsto \frac{1}{|1 - x e^{ix}|}$ , définie et continue sur  $[-1, 1]$ , y est bornée : propriété des fonctions continues sur un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$ .)

b/ On note désormais  $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n \sin nx}{n}$  pour  $x \in [-1, 1]$ . Pourquoi  $S$  est-elle une fonction continue de  $x$  sur  $[-1, 1]$ ?

Montrer que  $S$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  (se placer pour cela dans un intervalle fermé  $[-\alpha, \alpha]$ , avec  $0 < \alpha < 1$ , pour obtenir la convergence uniforme de la série des dérivées) et a pour dérivée :

$S'(x) = \sum_{n \geq 1} x^{n-1} \sin nx + \sum_{n \geq 1} x^n \cos nx$ . Calculer cette somme pour  $x \in ] -1, 1[$  en l'écrivant :

$\frac{1}{x} \Im \left( \sum_{n \geq 1} (x e^{ix})^n \right) + \Re \left( \sum_{n \geq 1} (x e^{ix})^n \right)$  pour  $x \neq 0$ , et 0 pour  $x = 0$ .

(N.B. : on doit trouver :  $S'(x) = \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{1 - 2x \cos x + x^2}$ )

c/ Vérifier que  $S'(x)$  est aussi la dérivée de la fonction :  $x \mapsto \text{Arctan} \frac{x \sin x}{1 - x \cos x}$ . En déduire que

$\forall x \in ] -1, 1[, S(x) = \text{Arctan} \frac{x \sin x}{1 - x \cos x}$ .

d/ Prolonger cette égalité par continuité de  $S$  en  $-1$  et en  $1$  pour en déduire que  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

et  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sin n}{n} = \frac{1}{2}$ . (N.B. : on rappelle que  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ , que  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ ,

et que  $\frac{1}{\tan \alpha} = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$  ; utiliser ces formules pour montrer que  $\frac{\sin 1}{1 - \cos 1} = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right)$  et

$\frac{\sin 1}{1 + \cos 1} = \tan \left( \frac{1}{2} \right)$  et en déduire les formules demandées.)

---

**Corrigé de l'examen partiel du 4 février 2004**

1. a/  $\sum_{n \geq 0} (\sqrt{n^3 + n + 1} - \sqrt{n^3 + n}) = \sum_{n \geq 0} \frac{n^3 + n + 1 - n^3 - n}{\sqrt{n^3 + n + 1} + \sqrt{n^3 + n}} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^3 + n + 1} + \sqrt{n^3 + n}}$   
 $\simeq 1 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ , qui converge ; et b/  $\sum_{n \geq 1} (\cos \frac{\pi}{n} - e^{-\frac{1}{n^2}}) = \sum_{n \geq 1} (1 - \frac{\pi^2}{2n^2} - 1 - \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}))$   
 $\simeq (-1 - \frac{\pi^2}{2}) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ , qui converge aussi.

2. Soit  $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$  [N.B. : = Arg sinh x] :  $f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}(x + \sqrt{1 + x^2})}$   
 $= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2} - 1) \dots (\frac{1}{2} - k + 1)}{k!} x^{2k} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1) \cdot (-3) \cdot (-5) \dots (-2k + 1)}{2^k k!} x^{2k}$   
 $= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k - 1)}{2^k k!} x^{2k} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2} x^{2k}$  (en multipliant numérateur et dénominateur par  $2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k = 2^k \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k = 2^k \cdot k!$ ) ; le développement de  $f$  s'en déduit, en intégrant celui de  $f'$  avec la constante d'intégration  $f(0) = 0$  :  $\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \frac{x^{2k+1}}{2k + 1}$ .

3. Le développement en série entière de  $\cos(x \sin t)$ , valable  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$ , permet d'écrire :

$J(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} \sin^{2k} t}{(2k)!} \right) dt$ . La question est ici : peut-on intervertir les signes  $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$  et  $\sum_{k=0}^{+\infty}$  ??

On va montrer en fait que :  $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}$  tel que

$N \geq M \implies \left| \sum_{k=0}^N \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^k x^{2k} \sin^{2k} t}{(2k)!} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin t) dt \right| \leq \varepsilon$ , ce qui montrera bien que

$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^k x^{2k} \sin^{2k} t}{(2k)!} dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^k x^{2k} \sin^{2k} t}{(2k)!} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin t) dt = J(x)$

Ceci revient à montrer que, la permutation des symboles  $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$  et  $\sum_{k=0}^N$  ne posant pas de problème puisqu'il s'agit d'une somme finie :

$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}$  tel que  $N \geq M \implies \left| \sum_{k=0}^N \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^k x^{2k} \sin^{2k} t}{(2k)!} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin t) dt \right|$   
 $= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^{2k} \sin^{2k} t}{(2k)!} dt - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} \sin^{2k} t}{(2k)!} \right\} \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} \sin^{2k} t}{(2k)!} dt \right| \leq \varepsilon$ ,

donc à montrer, en majorant  $|\sin t|$  par 1 et la valeur absolue de l'intégrale par l'intégrale de la valeur absolue, que :  $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}$  tel que  $N \geq M \implies \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right\} dt \leq \varepsilon$ .

Or pour  $x$  fixé, comme le rappelle le texte, le reste d'ordre  $N$  :  $\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$  du développement en série

de  $\cosh x$  :  $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$  peut être rendu inférieur à  $\frac{2}{\pi} \varepsilon$  à condition de choisir  $N$  assez grand, i.e. plus grand

qu'un certain  $M$ . Donc on a bien :  $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}$  tel que

$$N \geq M \implies \left| \sum_{k=0}^N \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^k x^{2k} \sin^{2k} t}{(2k)!} dt - J(x) \right| \leq \varepsilon, \text{ i.e. } J(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^k x^{2k} \sin^{2k} t}{(2k)!} dt, \text{ d'où}$$

le développement en série entière de  $J$  :  $J(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} t dt$ , et, finalement, à l'aide du

calcul de l'intégrale de Wallis :  $J(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}$ , le développement en série cherché.

4. a/  $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = f(x) = \int_0^x \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!} \right\} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)}$ . Le rayon de convergence de cette série est  $+\infty$  comme celui de l'exponentielle.

b/  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{-2n-1}}{2^n n! (2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n+1} n! (2n+1)}$ , qui est une série alternée, puisque l'application  $n \mapsto 2^{3n+1} n! (2n+1)$  est clairement croissante vers  $+\infty$ . D'après le rappel du texte,

$$\left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{3n+1} n! (2n+1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n+1} n! (2n+1)} \right| \leq \frac{1}{2^7 \cdot 2.5} = \frac{1}{1280} < 10^{-3}, \text{ d'où une valeur approchée à}$$

$10^{-3}$  près de  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  : la somme des 2 premiers termes :  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^4 \cdot 2.3} = \frac{47}{96} = 0.490$  à  $10^{-3}$  près.

5. a/ En suivant les indications du texte, on vérifie que la fonction  $x \mapsto 1 - x e^{ix}$  ne s'annule en aucun point de  $\mathbb{R}$ , car en un tel point  $x$  on devrait avoir :  $e^{ix} = \frac{1}{x}$ , d'où, en prenant les modules,  $x = \pm 1$ , et

ni 1 ni  $-1$  n'annulent cette fonction. La fonction  $x \mapsto \frac{1}{1 - x e^{ix}}$  est donc définie et continue sur  $\mathbb{R}$ , et en particulier elle est bornée et atteint ses bornes sur le compact  $[-1, 1]$ . Il en résulte que les sommes

partielles  $\left| \sum_{n=0}^N x^n \sin nx \right| = \left| \Im \sum_{n=0}^N x^n e^{inx} \right| \leq \left| \sum_{n=0}^N x^n e^{inx} \right| = \left| \frac{1 - x^{N+1} e^{i(N+1)x}}{1 - x e^{ix}} \right| \leq \frac{2}{|1 - x e^{ix}|}$  sont

bornées uniformément en  $x \in [-1, 1]$ . Alors le critère de convergence uniforme d'Abel montre que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} x^n \sin nx$  converge uniformément en  $x \in [-1, 1]$ .

b/ L'application  $S : x \mapsto S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} x^n \sin nx$  est ainsi continue sur  $[-1, 1]$ . Pour montrer qu'elle

est dérivable sur  $] -1, 1[$ , considérons sur tout intervalle  $[-\alpha, \alpha]$ , avec  $\alpha \in ]0, 1[$ , la série des dérivées :

$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \sin nx + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos nx$ . Il est clair que pour  $x \in [0, \alpha]$ , chacune de ces séries est absolument

convergente ( $0 < \alpha < 1$ , donc  $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n < +\infty$ ). Donc  $S$  est dérivable sur tout  $[-\alpha, \alpha]$ , avec  $\alpha \in ]0, 1[$ ,

donc sur  $] -1, 1[$  et  $S'(x)$  a pour valeur  $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \sin nx + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos nx$ , soit 0 pour  $x = 0$  et pour  $x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{1}{x} \Im \left( \sum_{n \geq 1} (x e^{ix})^n \right) + \Re \left( \sum_{n \geq 1} (x e^{ix})^n \right) = \frac{1}{x} \Im \left( \frac{x e^{ix}}{1 - x e^{ix}} \right) + \Re \left( \frac{x e^{ix}}{1 - x e^{ix}} \right) \\ &= \frac{1}{x} \Im \left( \frac{(x \cos x + ix \sin x)(1 - x \cos x + ix \sin x)}{(1 - x \cos x)^2 + x^2 \sin^2 x} \right) + \Re \left( \frac{(x \cos x + ix \sin x)(1 - x \cos x + ix \sin x)}{(1 - x \cos x)^2 + x^2 \sin^2 x} \right) \\ &= \frac{1}{x} \frac{x \sin x (1 - x \cos x) + x^2 \sin x \cos x}{1 - 2x \cos x + x^2} + \frac{x \cos x (1 - x \cos x) - x^2 \sin^2 x}{1 - 2x \cos x + x^2} \\ &= \frac{1}{x} \frac{x \sin x}{1 - 2x \cos x + x^2} + \frac{x \cos x - x^2}{1 - 2x \cos x + x^2} = \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{1 - 2x \cos x + x^2}, \text{ expression qui est aussi vraie en} \end{aligned}$$

$x = 0$ , donc pour tout  $x \in ]-1, 1[$ .

c/ Un calcul simple montre que  $\forall x \in ]-1, 1[$ ,  $\frac{\sin x + x \cos x - x^2}{1 - 2x \cos x + x^2} = \left( \text{Arc tan } \frac{x \sin x}{1 - x \cos x} \right)'$ , et comme  $S(0) = 0$ , on en déduit bien que  $\forall x \in ]-1, 1[$ ,  $S(x) = \text{Arc tan } \frac{x \sin x}{1 - x \cos x}$ .

d/ Mais comme  $S$  est définie et *continue* sur  $[-1, 1]$  tout entier, et qu'il en est de même pour la fonction  $x \mapsto \text{Arc tan } \frac{x \sin x}{1 - x \cos x}$ , on peut prolonger par continuité en  $1$  et  $-1$  (i.e. faire tendre  $x$  vers  $1$

ou  $-1$  dans) l'égalité  $S(x) = \text{Arc tan } \frac{x \sin x}{1 - x \cos x}$ , démontrée pour  $x \in ]-1, 1[$ , pour obtenir : en faisant

$x = 1 : \sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n} = \text{Arc tan } \frac{\sin 1}{1 - \cos 1}$  et, en faisant  $x = -1 : \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sin n}{n} = \text{Arc tan } \frac{\sin 1}{1 + \cos 1}$ . Mais

$\frac{\sin 1}{1 - \cos 1} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}}{2 \sin^2 \frac{1}{2}} = \frac{1}{\tan \frac{1}{2}} = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right)$  et  $\frac{\sin 1}{1 + \cos 1} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}}{2 \cos^2 \frac{1}{2}} = \tan \frac{1}{2}$ . On en déduit

alors que :  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$  et  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sin n}{n} = \frac{1}{2}$ .