Examen partiel du 12 décembre 1997

1. (3 points) Calculer la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \frac{1}{1+n^3} + \frac{2^2}{2^3+n^3} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{(n-1)^3+n^3} + \frac{n^2}{n^3+n^3}$$

2. (3 points) Calculer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_1^{1+h} \frac{t^{75}\ln(1+t)}{(\sin\frac{\pi}{2}t)^{99}}\,dt$

3. (3 points) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{Arctan}x}{1+x^2}dx$

4. (8 points) Soient $a>0$, $b>0$, et soit $s_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{a+nb}$.

On se propose de montrer que $\lim\limits_{N\to+\infty} s_N = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt$

a/ Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(-t^b)^n\,dt = \frac{(-1)^n}{a+nb}$

b/ En déduire que

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 t^{a-1}\left[\frac{1}{1+t^b} - \sum_{n=0}^{N}(-t^b)^n\right]\,dt$$

En calculant la somme de la suite géométrique $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-t^b)^n$ et en majorant $\dfrac{1}{1+t^b}$ par 1, montrer que

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{a+nb}\right| \leq \frac{1}{a+(N+1)b}$$

et en déduire la valeur de $\lim\limits_{N\to+\infty} s_N$

c/ Applications : donner la valeur des limites : $\lim\limits_{N\to+\infty} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$

et $\lim\limits_{N\to+\infty} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$

T.S.V.P.

5. (8 points) On se propose de déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, où $u_n = \dfrac{n^2}{[1^1 2^2 3^3 \dots n^n]^{\frac{4}{n^2}}}$

a/ Montrer que $\ln u_n = 2\ln n - \dfrac{4}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\ln n - \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n}$

b/ On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(2\ln n - \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln n\right) = 0$, et donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln u_n = -4\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n}$.

c/ On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$; il en résulte que la fonction $x \mapsto x\ln x$, prolongée par continuité par la valeur 0 en 0, est continue sur $\mathbb{R}^+$ tout entier, et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\; dx$ a un sens. Calculer cette intégrale, à l'aide d'une intégration par parties, en remarquant que $x\ln x\; dx = x\; d\,(x\ln x - x)$.

d/ Exprimant $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\; dx$ comme limite d'une somme de Riemann, en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.