

Examen partiel du 16 décembre 2003

1. (6 points) Calculer les limites des sommes de Riemann :

a/ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n^3}{n^3 + k^3}$ (on donne : $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+x} - \frac{1}{6} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$);

b/ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{2n}$ (intégration par parties).

2. (8 points) Calculer une primitive pour chacune des quatre fonctions suivantes, définies sur $[-1, 1]$:

a/ $x \mapsto \text{Arc cos } x$; b/ $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$; c/ $x \mapsto x \text{Arc sin } x$; d/ $x \mapsto \sqrt{\frac{\text{Arc cos } x}{1-x^2}}$.

Calculer la valeur moyenne sur $[-1, 1]$ de chacune de ces quatre fonctions.

(N.B. : la dernière fonction n'est pas définie aux bornes, mais sa primitive (n'importe laquelle) l'est, et l'intégrale sur $[-1, 1]$ -intégrale impropre- a bien un sens.)

3. (3 points) Calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \text{Arc tan } x \, dx$ (on ne cherchera pas à calculer de primitive).

4. (3 points) Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \, dx$ (en écrivant que $\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}x \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ et en intégrant par parties).

5. (4 points) On considère l'équation différentielle : $y' + 3y = e^{-t} \cos t$ (1)

a/ On cherche les solutions sous la forme $y(t) = z(t)e^{-3t}$ (N.B. s'il y avait 0 à la place de $e^{-t} \cos t$, il est facile de vérifier que ce serait la forme générale de la solution de (1), avec $z = Cte$). Montrer que

$z'e^{-3t} = e^{-t} \cos t$ et en déduire que $z = \int e^{2t} \cos t \, dt$.

b/ Calculer la primitive la plus générale de $t \mapsto e^{2t} \cos t$ et en déduire la solution générale de (1).

Corrigé de l'examen partiel du 16 décembre 2003

1. a/ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n^3}{n^3 + k^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^3}$ (limite d'une somme de Riemann)

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3} [\ln(1+x)]_0^1 - \frac{1}{6} [\ln(1-x+x^2)]_0^1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\text{Arc tan } \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

b/ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{2n}$ (limite d'une somme de Riemann)

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \frac{2}{\pi} [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{2}{\pi} [\sin x - x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

2. a/ $\int \text{Arc cos } x dx = x \text{Arc cos } x + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \text{Arc cos } x - \sqrt{1-x^2} + Cte$

b/ $\int \sqrt{1-x^2} dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, soit :

$2 \int \sqrt{1-x^2} dx = x\sqrt{1-x^2} + \text{Arc sin } x + Cte$, i.e. $\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2} + \text{Arc sin } x) + Cte$

ou encore, par un changement de variable : si $u = \text{Arc sin } x$: alors $x = \sin u$ et $\sqrt{1-x^2} = \cos u$ (comme $u = \text{Arc sin } x$, $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, donc $\cos u \geq 0$) et $dx = \cos u du$, donc :

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \cos^2 u du = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2u) du = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{2} \sin 2u \right) + Cte = \frac{1}{2} (u + \sin u \cos u) + Cte$$

$$= \frac{1}{2} (\text{Arc sin } x + x\sqrt{1-x^2}) + Cte.$$

c/ $\int x \text{Arc sin } x dx = \frac{1}{2} \int \text{Arc sin } x d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \text{Arc sin } x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= \frac{1}{2} x^2 \text{Arc sin } x + \frac{1}{2} \int \frac{(1-x^2) dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} (x^2 - 1) \text{Arc sin } x + \frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 - 1) \text{Arc sin } x + \frac{1}{4} (x\sqrt{1-x^2} + \text{Arc sin } x) + Cte \text{ (d'après le b/)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \text{Arc sin } x + \frac{1}{4} x\sqrt{1-x^2} + Cte.$$

d/ Si $u = \text{Arc cos } x$: $\int \sqrt{\frac{\text{Arc cos } x}{1-x^2}} dx = - \int \sqrt{u} du = -\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + Cte = -\frac{2}{3} (\text{Arc cos } x)^{\frac{3}{2}} + Cte.$

Valeur moyenne de ces 4 fonctions sur $[-1, 1]$:

a/ $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \text{Arc cos } x dx = \frac{1}{2} [x \text{Arc cos } x - \sqrt{1-x^2}]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$

b/ $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{4} [x\sqrt{1-x^2} + \text{Arc sin } x]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4}$

c/ $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x \text{Arc sin } x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \text{Arc sin } x + \frac{1}{4} x\sqrt{1-x^2} \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{8}.$

$$d/ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{\text{Arc cos } x}{1-x^2}} dx = \frac{1}{3} \left[-(\text{Arc cos } x)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} \pi^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi \sqrt{\pi}}{3}.$$

3. D'après la formule fondamentale du calcul intégral (i.e. $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t) dt$), si F est une primitive de la fonction sous le signe \int , $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \text{Arc tan } x dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h}$ est la dérivée en 1 de F , c'est-à-dire la valeur en 1 de la fonction F' , fonction sous le signe \int :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \text{Arc tan } x dx = \frac{1}{(1+1)^2} \text{Arc tan } 1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{4.} \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx &= -\frac{1}{2} \int_0^1 x \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{2} \left[\frac{x}{1+x^2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} [\text{Arc tan } x]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi - 2}{8}. \end{aligned}$$

5. a/ De $y(t) = z(t)e^{-3t}$ on tire en dérivant : $e^{-t} \cos t = y' + 3y = z'e^{-3t} - 3ze^{-3t} + 3ze^{-3t} = z'e^{-3t}$, d'où $z'(t) = e^{2t} \cos t$, i.e. en intégrant : $z(t) = \int e^{2t} \cos t dt + Cte$.

b/ On fait une double intégration par parties : $\int e^{2t} \cos t dt = \int e^{2t} d(\sin t) = e^{2t} \sin t - 2 \int e^{2t} \sin t dt = e^{2t} \sin t + 2 \int e^{2t} d(\cos t) = e^{2t} \sin t + 2e^{2t} \cos t - 4 \int e^{2t} \cos t dt$, d'où en regroupant les $\int e^{2t} \cos t dt$: $5 \int e^{2t} \cos t dt = e^{2t}(\sin t + 2 \cos t) + Cte$, et $z(t) = \int e^{2t} \cos t dt = \frac{1}{5} e^{2t}(\sin t + 2 \cos t) + Cte$. On en déduit la solution générale de l'équation (1) : $y = z(t)e^{-3t} = \frac{1}{5} e^{-t}(\sin t + 2 \cos t) + \lambda e^{-3t}$ (où λ est une constante réelle quelconque).