Examen partiel du 14 décembre 2000

1. (5 points) Calculer la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{(k^2+n^2)^2} = \frac{1}{(1+n^2)^2} + \frac{2^3}{(2^2+n^2)^2} + \ldots + \frac{(n-1)^3}{((n-1)^2+n^2)^2} + \frac{n^3}{(n^2+n^2)^2}$$

(indication : on pourra exprimer cette limite sous forme d'une intégrale, que l'on calculera, à l'aide de l'identité : $\dfrac{x^3}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$).

2. (3 points) Calculer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+h} \frac{(\sin t)^4 (\tan t)^{2001}}{t}\, dt$

3. (3 points) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \ln t dt$ (où e est la base des logarithmes népériens).

4. (5 points) Trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$ (indication : on pourra faire les changements de variable successifs : $u = \sqrt{x}, t = \mathrm{Argsh} u$ et $s = e^t$ ... ou bien chercher à simplifier l'expression de la fonction).

5. (8 points) a/ Soit f de classe C^1 sur $[0,1]$, $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$, et $u_n = \dfrac{1}{n}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right) + \ldots + f\left(\dfrac{k}{n}\right) + \ldots + f\left(\dfrac{n}{n}\right)\right]$.
Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n(u_n - I) = \dfrac{f(1)-f(0)}{2}$ (indication : on pourra écrire $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)dt$, utiliser pour chaque k la formule de Taylor-Maclaurin à l'ordre 2 appliquée à une primitive de f entre $\dfrac{k-1}{n}$ et $\dfrac{k}{n}$, et conclure à l'aide d'une somme de Riemann).
b/ On suppose de plus f de classe C^2 sur $[0,1]$ et on pose :
$v_n = \dfrac{1}{n}\left[f\left(\dfrac{1}{2n}\right) + \ldots + f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right) + \ldots + f\left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)\right]$. Montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^2(v_n - I) = \dfrac{f'(0)-f'(1)}{24}$
(indication : on pourra écrire : $n^2(v_n - I) = 2n^2\left(\dfrac{u_n+v_n}{2} - I\right) - n^2(u_n - I)$ et appliquer la formule de Taylor-Maclaurin à l'ordre 3 à une primitive de f pour chacun de ces deux termes comme dans le a/).