Examen final du 6 février 1998

1. (4 points) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$ (indication : utiliser une somme de Riemann).

2. (4 points) Calculer les intégrales suivantes :

a/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$; b/ $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}+e^x+1}dx$ (indication : poser $u = e^x$).

3. (6 points) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}$ converge et la calculer.
On pourra pour mener ce calcul faire le changement de variable $X = \sqrt{x}$ et vérifier l'identité :

$$\frac{2}{1+X^4} = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{2}}(2X-\sqrt{2})+\frac{1}{2}}{X^2-X\sqrt{2}+1} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}(2X+\sqrt{2})+\frac{1}{2}}{X^2+X\sqrt{2}+1}$$

4. (6 points) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$ converge.

En utilisant (après l'avoir démontrée) l'identité : $1 = \dfrac{4}{3}(x^2+x+1) - \dfrac{1}{3}(2x+1)^2$, montrer que

$$\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{4}{3}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{3}\int (x+1)(2x+1)\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)' dx$$

(noter le “ $'$ ” de dérivation en haut de la dernière parenthèse).
En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{(x^2+x+1)^2}$ et la valeur de l'intégrale I.

5. (4 points) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+y^2}{(1+2x^2y^2+x^4+y^4)^\alpha}dxdy$ converge-t-elle ? La calculer alors en fonction de α.

6. (4 points) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\cos\theta+\sin\theta)^2 d\theta$ (on rappelle que $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$, $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, et $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$)

En déduire, en passant en coordonnées polaires, le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int\int_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \frac{(x+y)^2}{1+x^2+y^2}dxdy$

(N.B. : Il y a au total 28 points à prendre, pour une note sur 20. On pourra composer sa copie à la carte, en choisissant les exercices que l'on veut traiter parmi les 6 proposés.)