

Examen final (2^e session) du 1^{er} juillet 1997

1. (4 points) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ converge.

La calculer en utilisant le changement de variable $x = \sin^2 t$.

2. (4 points) Calculer par intégration par parties les intégrales :

$$a/ \int_{\frac{1}{e}}^e \ln x dx ; \quad b/ \int_1^{\sqrt{3}} \text{Arctan} x dx.$$

3. (8 points) On se propose de déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left[1 + \frac{\pi}{n} \sin \frac{k\pi}{n} \right]$

$$\left(= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} \right] \left[1 + \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \right] \dots \left[1 + \frac{\pi}{n} \sin \frac{n\pi}{n} \right] \right).$$

a/ Vérifier que $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], |\ln(1+x) - x| \leq x^2$ (on étudiera pour cela les variations sur

l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ de $g : x \mapsto \ln(1+x) - x - x^2$ et de $h : x \mapsto \ln(1+x) - x + x^2$).

b/ En déduire que pour n assez grand,

$$\frac{\pi}{n} \sin \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi^2}{n^2} \sin^2 \frac{k\pi}{n} \leq \ln \left(1 + \frac{\pi}{n} \sin \frac{k\pi}{n} \right) \leq \frac{\pi}{n} \sin \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi^2}{n^2} \sin^2 \frac{k\pi}{n}$$

Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n}$? Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{n^2} \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{n}$? En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \prod_{k=1}^n \left[1 + \frac{\pi}{n} \sin \frac{k\pi}{n} \right] = \int_0^\pi \sin t dt$$

et enfin que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left[1 + \frac{\pi}{n} \sin \frac{k\pi}{n} \right] = e^2$$

4. (4 points) Montrer en passant en coordonnées polaires que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(2+x^2+y^2)^2}$$
 converge et la calculer.

5. (4 points) Calculer l'intégrale $\int_0^1 \int_0^1 (x+y)e^{-xy} dx dy$ (séparer l'intégrale en deux parties et

faire les changements de variable $(x, y) \mapsto (x, e^{-xy})$ dans l'une et $(x, y) \mapsto (y, e^{-xy})$ dans l'autre).