

Examen final (2<sup>e</sup> session) du 29 juin 2001

**1. (4 points)** Quelle est la limite de la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{1+n^3} + \frac{2^2}{2^3+n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{(n-1)^3+n^3} + \frac{n^2}{n^3+n^3} ?$$

**2. (4 points)** Montrer que l'intégrale  $\int_{-1}^1 \frac{(\text{Arc sin } x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$  converge et la calculer.

**3. (6 points)** Montrer que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$  converge.

Écrire la décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  de la fraction rationnelle  $\frac{1}{1+X^3}$  (rappel : cette décomposition est de la forme  $\frac{a}{1+X} + \frac{bX+c}{1-X+X^2}$  ; pour déterminer  $a, b$  et  $c$ , on pourra procéder par identification) et en déduire : a/une primitive sur  $[1, +\infty[$  de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$  ; b/ la valeur de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ .

En déduire (à l'aide du changement de variable  $u = \frac{1}{x}$ ) la valeur de l'intégrale  $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^3}$

**4. (4 points)** Calculer l'intégrale double sur le quart de disque :  $\int \int_{\{x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}} \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy$  (passer en coordonnées polaires). Que dire de l'intégrale de la même fonction sur le disque unité tout entier ?

**5. (8 points)** Soit l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+x)(1+xy^2)}$ .

En intégrant d'abord en  $y$  (avec le changement de variable  $t = y\sqrt{x}$ , d'où  $dx dy = \frac{1}{\sqrt{x}} dx dt$ ), montrer que cette intégrale converge ; la calculer à l'aide du changement de variable  $u = \sqrt{x}$ .

En utilisant la décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{R}(x)$  :

$$\frac{1}{(1+x)(1+xy^2)} = \frac{1}{1-y^2} \frac{1}{1+x} - \frac{y^2}{1-y^2} \frac{1}{1+xy^2} \text{ (vérifier cette égalité), et en intégrant d'abord en}$$

$x$ , en déduire que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln y}{y^2-1} dy$  converge et donner sa valeur. Quel théorème permet ici d'intervir l'ordre d'intégration (en  $x$ , puis en  $y$ , ou l'inverse) et qu'est-ce qui justifie son application ?

---