Examen final du 9 février 2001

1. (5 points) Soit f continue strictement positive sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\sigma_n = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$ telle que les aires sous la courbe représentative de f entre $x = x_i$ et $x = x_{i+1}$ soient égales pour tout i de 0 à $n-1$ (et donc toutes égales à $\frac{1}{n}\int_a^b f(t)dt$).

Montrer que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right) = \dfrac{\int_a^b f^2(t)dt}{\int_a^b f(t)dt}$. *Indications : on pourra montrer que (pour tout n et) pour tout i entre 0 et $n-1$, il existe un c_i entre x_i et x_{i+1} tel que $(x_{i+1} - x_i)f(c_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)dt$; en écrivant alors $\frac{1}{n} = \dfrac{(x_{i+1} - x_i)f(c_i)}{\int_a^b f(t)dt}$, montrer que* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(x_i)f(c_i)}{\int_a^b f(t)dt}$ *; comparer le numérateur à la somme $\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f^2(x_i)$: montrer l'existence d'une constante K indépendante de n telle que pour tout i de 0 à $n-1$, $x_{i+1} - x_i \leq \frac{K}{n}$ (N.B. : on pourra vérifier que $K = \int_a^b f(t)dt / \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ convient) ; en utilisant alors l'uniforme continuité de f sur l'intervalle compact $[a,b]$, montrer que la différence $\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(x_i)f(c_i) - \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f^2(x_i)$ peut être rendue aussi petite que l'on veut à condition de choisir n assez grand.*

2. (8 points) a/ Montrer que $\forall y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1+\cos y}{\sin y}\right) - \mathrm{Arctan}(\cot y) = \frac{y}{2}$ et que $\forall y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1-\cos y}{\sin y}\right) + \mathrm{Arctan}(\cot y) = \frac{\pi - y}{2}$ (*indication : dériver les deux membres et évaluer en* $y = \frac{\pi}{3}$).

b/ Soit $y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. En faisant le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$, calculer en fonction de y l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dt}{1 + \cos y \sin t}$ $\left(\text{on rappelle que } \forall t \in]-\pi, \pi[, \text{ si } u = \tan\frac{t}{2}, \text{ alors } \sin t = \dfrac{2u}{1+u^2}\right)$ et montrer à l'aide du a/ que $\forall x \in]0,1[$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dt}{1 + x\sin t} = \dfrac{\mathrm{Arccos}\, x}{\sqrt{1-x^2}}$.

c/ Calculer de même, pour $y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dt}{1 - \cos y \sin t}$ et montrer à l'aide du a/ que $\forall x \in]0,1[$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dt}{1 - x\sin t} = \dfrac{\pi - \mathrm{Arccos}\, x}{\sqrt{1-x^2}}$.

d/ En déduire que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dt}{1 + x\sin t}$ est définie et continue sur $]-1,1[$. Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ converge et la calculer.

3. (5 points) On se propose de calculer les intégrales $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$ et $J=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x^2+x+1)^2}$. Montrer que I et J sont bien convergentes. En écrivant que $\frac{4}{3}(x^2+x+1)-\frac{1}{3}(2x+1)^2=1$ (vérifier cette égalité), calculer I à l'aide d'une intégration par parties. Enfin, calculer J, en vérifiant d'abord l'égalité :
$$\frac{1}{x^2(x^2+x+1)^2}=\frac{-2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+x+1)^2}.$$

4. (5 points) Soit, pour $0<\varepsilon<R$, l'intégrale $I=\displaystyle\int\int_{D(\varepsilon,R)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\varepsilon^2\leq x^2+y^2\leq R^2\}}\frac{dxdy}{x^2+xy+y^2}$ ($D(\varepsilon,R)$ est une couronne circulaire dans $\mathbb{R}^2$). Montrer, à l'aide d'un passage en coordonnées polaires, que $I=\left(\ln\dfrac{R}{\varepsilon}\right)\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\sin\theta\cos\theta}$. En déduire la valeur de I en justifiant les égalités suivantes :
$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\sin\theta\cos\theta}=\int_0^{4\pi}\frac{ds}{2+\sin s}=2\int_0^{2\pi}\frac{ds}{2+\sin s}=2\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2+\cos t}=4\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{3+u^2}$$
$\left(\text{on rappelle que } \forall t\in]-\pi,\pi[,\ \text{si } u=\tan\dfrac{t}{2}, \text{ alors } \cos t=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)$.

5. (5 points) Montrer que $\forall y\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin 2xy\,dx$ converge. À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que cette intégrale a pour valeur $\dfrac{2y}{1+4y^2}$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 dy\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin 2xy\,dx$ converge et la calculer. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\frac{\sin^2 x}{x}dx$. Quel théorème utilise-t-on ici et qu'est-ce qui justifie son utilisation ?