

Examen partiel du 30 avril 2002

1. (6 points) On rappelle que : a/ tout sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n peut s'écrire comme une intersection de noyaux de formes linéaires ; b/ l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert ; c/ l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.

(N. B. : les trois questions **1.1.**, **1.2.** et **1.3.** qui suivent sont indépendantes.)

1.1. Montrer que tout sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n est fermé. En déduire que si F est un sous-espace vectoriel et \vec{x} est un vecteur de \mathbb{R}^n qui n'appartient pas à F , il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $B(\vec{x}, \varepsilon) \cap F = \emptyset$.

1.2. Soit $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n telle que : a/ $\exists \vec{v} \in \mathbb{R}^n / \forall k \in \mathbb{N}, \langle \vec{x}_k, \vec{v} \rangle = 0$; b/ $\forall k \in \mathbb{N}, \forall l \geq k, \|\vec{x}_k - \vec{x}_l\| < 2^{-k}$. Montrer que $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et qu'elle converge vers un $\vec{\xi}$ tel que $\langle \vec{\xi}, \vec{v} \rangle = 0$.

1.3. Soit f une application continue de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , k un réel, et $E_{f,k} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) > k\}$. Montrer que $E_{f,k}$ est ouvert ; en déduire que si $f(\vec{x}) > k$, alors $\exists \varepsilon > 0 / \forall \vec{y} \in B(\vec{x}, \varepsilon), f(\vec{y}) > k$.

2. (6 points) Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Calculer $\overrightarrow{\gamma'(t)}$ et $\overrightarrow{\gamma''(t)}$; on pose $\overrightarrow{\tau(t)} = \frac{\overrightarrow{\gamma'(t)}}{\|\overrightarrow{\gamma'(t)}\|}$, $\overrightarrow{\nu(t)} = \overrightarrow{\gamma''(t)}$ et $\overrightarrow{\beta(t)} = \overrightarrow{\tau(t)} \wedge \overrightarrow{\nu(t)}$; montrer que $\{\overrightarrow{\tau(t)}, \overrightarrow{\nu(t)}, \overrightarrow{\beta(t)}\}$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^3 (le repère orthonormé $(\gamma(t), \overrightarrow{\tau(t)}, \overrightarrow{\nu(t)}, \overrightarrow{\beta(t)})$ est appelé "repère mobile en $\gamma(t)$ ").

Donner des équations de la tangente en $\gamma(t)$ à la courbe image $\text{Im}(\gamma)$. On considère l'intersection de cette tangente avec le plan $\{z = 0\}$: elle décrit, lorsque t varie, une courbe plane. Donner une paramétrisation $x = x(t), y = y(t)$ de cette courbe et étudier son allure au voisinage de $t = 0$.

3. (6 points) On rappelle que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}$, on définit :

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{A^k}{k!} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N t^k \frac{A^k}{k!} \text{ et que } e^{A+B} = e^A e^B \text{ pour toutes matrices } A \text{ et } B \text{ qui commutent.}$$

3.1. Que vaut e^0 ? (où O est la matrice nulle)

3.2. Montrer que $e_A : t \mapsto e^{tA}$ est une application de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ dérivable en $t = 0$, de dérivée A , i.e. $e'_A(0) = A$. Pour cela on montrera (ou on admettra) que $e^{tA} - I - tA = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^N t^k \frac{A^k}{k!}$

est un $o(t)$ en majorant, pour tout N , $\|t^2 A^2 \sum_{k=0}^N t^k \frac{A^k}{(k+2)!}\|$ par $t^2 \|A^2\| e^{\|A\|}$ pour $|t| \leq 1$.

3.3. En déduire que e_A est dérivable en tout t de \mathbb{R} , de dérivée $e'_A(t) = A e^{tA}$.

3.4. En déduire que $\forall \vec{Z} \in \mathbb{R}^n$, l'application $X : t \mapsto e^{tA} \vec{Z}$ est dérivable et satisfait pour tout t l'équation différentielle : $\overrightarrow{X'(t)} = A \cdot \overrightarrow{X(t)}$, avec la condition initiale en 0 : $\overrightarrow{X(0)} = \vec{Z}$.

4. (4 points) Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = 1 + x e^{-x}$. Variations et graphe sommaire de f . Montrer que f applique l'intervalle $[1, 2]$ dans lui-même. Montrer, à l'aide de la formule des accroissements finis, que f est contractante de l'intervalle $[1, 2]$ dans lui-même.

En déduire, à l'aide du théorème du point fixe, l'existence d'un unique $\xi \in [1, 2]$ tel que $1 + \xi e^{-\xi} = \xi$.

En donner un algorithme de calcul approché à l'aide d'une suite définie par une relation de récurrence.

5. (4 points) Soit φ l'application de \mathbb{R}^2 dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Montrer sans calculs que l'application : $\vec{x} \mapsto \|\varphi(\vec{x})\|^2$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} est bornée -et atteint ses bornes- sur le cercle-unité $\{x^2 + y^2 = 1\}$. Déterminer (par le calcul) ces bornes en paramétrant le cercle-unité par $\{x = \cos \theta, y = \sin \theta, \theta \in [0, 2\pi[\}$ (on pourra montrer que $\|\varphi(\vec{x})\|^2 = 3 + 2\sqrt{2} \sin(2\theta - \frac{\pi}{4})$).

Corrigé de l'examen partiel du 30 avril 2002

1.1. Tout sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n peut s'écrire comme une intersection d'hyperplans (voir le cours); or tout hyperplan est un fermé de \mathbb{R}^n comme image réciproque de $\{0\}$ -fermé dans \mathbb{R} par une forme linéaire, i.e. une application linéaire, donc continue, de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Comme une intersection de fermés est un fermé, tout sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n est bien un fermé. Il en résulte que si F est un sous-espace vectoriel, son complémentaire F^c est ouvert: donc si $\vec{x} \in F^c$, il existe une boule $B(\vec{x}, \varepsilon)$ de centre \vec{x} entièrement contenue dans F^c , ce qui est exactement dire que $B(\vec{x}, \varepsilon) \cap F = \emptyset$.

1.2. Tout d'abord, la suite $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de l'hyperplan \vec{v}^\perp , qui est d'après ce qui précède un sous-espace vectoriel fermé de \mathbb{R}^n ; de plus cette suite est clairement de Cauchy: pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, soit N le premier entier tel que $2^{-N} \leq \varepsilon$; alors d'après les hypothèses faites sur la suite $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\forall k \geq N, \forall l \geq N, \|\vec{x}_k - \vec{x}_l\| < \varepsilon$. Comme elle est de Cauchy dans \mathbb{R}^n , elle converge, et comme \vec{v}^\perp est fermé, elle converge dans \vec{v}^\perp : donc sa limite $\vec{\xi}$ est bien dans \vec{v}^\perp , i.e. telle que $\langle \vec{\xi}, \vec{v} \rangle = 0$.

1.3. $E_{f,k} = f^{-1}(]k, +\infty[)$, image réciproque d'un intervalle ouvert de \mathbb{R} par une application continue, est un ouvert de \mathbb{R}^n . Donc $\forall \vec{x} \in E_{f,k}, \exists \varepsilon > 0 / \forall \vec{y} \in B(\vec{x}, \varepsilon), \vec{y} \in E_{f,k}$, ce qui est exactement ce qu'il fallait démontrer.

2. Des calculs immédiats donnent: $\vec{\gamma}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{\gamma}''(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix},$
 $\vec{\nu}(t) = \vec{\gamma}''(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{\beta}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 1 \end{bmatrix}$. On a: $\langle \vec{\tau}(t), \vec{\nu}(t) \rangle = 0$: comme $\vec{\tau}(t)$ et $\vec{\nu}(t)$ sont

orthogonaux (et donc leur sinus est égal à 1) et de norme 1, $\vec{\beta}(t) = \vec{\tau}(t) \wedge \vec{\nu}(t)$ est orthogonal à $\vec{\tau}(t)$ et $\vec{\nu}(t)$, et de norme 1. Il en résulte que le repère $(\vec{\gamma}(t), \vec{\tau}(t), \vec{\nu}(t), \vec{\beta}(t))$ est un repère orthonormé de \mathbb{R}^3 .

Un point $M(x, y, z)$ est sur la tangente en $\gamma(t)$ à la courbe image $Im(\gamma)$ si et seulement si le

vecteur $\vec{OM} - \vec{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} x - \cos t \\ y - \sin t \\ z - t \end{bmatrix}$ est colinéaire à $\vec{\gamma}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}$, c'est-à-dire si et seulement

si (deux équations suffisent): $x - \cos t = -(z - t) \sin t$ et $y - \sin t = (z - t) \cos t$, d'où en faisant $z = 0$ dans ces équations une paramétrisation de l'intersection cherchée de la tangente avec le plan $\{z = 0\}$: $x = x(t) = \cos t + t \sin t, y = y(t) = \sin t - t \cos t$. Soit $c(t)$ le point $(x(t), y(t))$. On

calcule: $\vec{c}'(t) = \begin{bmatrix} t \cos t \\ t \sin t \end{bmatrix}, \vec{c}''(t) = \begin{bmatrix} \cos t - t \sin t \\ \sin t + t \cos t \end{bmatrix}, \vec{c}'''(t) = \begin{bmatrix} -2 \sin t - t \cos t \\ 2 \cos t - t \sin t \end{bmatrix}$, d'où en $t = 0$:

$\vec{c}'(0) = \vec{0}, \vec{c}''(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{c}'''(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. On a ici $p = 2, q = 3$: la courbe $Im(c)$ admet donc en $t = 0$

un point de rebroussement de première espèce (la courbe $Im(c)$ s'appelle une *développante de cercle*).

3.1. $e^0 = I$, puisque $A^0 = I$ est le seul terme non nul dans la somme $\sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{A^k}{k!}$ lorsqu'on fait $t = 0$.

3.2. On a bien $e^{tA} - I - tA = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^N t^k \frac{A^k}{k!} = \lim_{N \rightarrow \infty} t^2 A^2 \sum_{k=0}^{N-2} t^k \frac{A^k}{(k+2)!}$; or pour tout N ,

$$\left\| t^2 A^2 \sum_{k=0}^{N-2} t^k \frac{A^k}{(k+2)!} \right\| \leq t^2 \|A\|^2 \sum_{k=0}^{N-2} |t|^k \frac{\|A\|^k}{(k+2)!} \leq t^2 \|A\|^2 \sum_{k=0}^{N-2} |t|^k \frac{\|A\|^k}{k!} \leq t^2 \|A\|^2 \sum_{k=0}^{+\infty} |t|^k \frac{\|A\|^k}{k!}$$

$$= t^2 \|A\|^2 e^{|t|\|A\|} \leq t^2 \|A\|^2 e^{\|A\|} \text{ (pour } |t| \leq 1 \text{) est un } o(t), \text{ donc } \forall N, \left\| t^2 A^2 \sum_{k=0}^{N-2} t^k \frac{A^k}{(k+2)!} \right\| = o(t),$$

et ceci reste vrai en passant à la limite lorsque $N \rightarrow +\infty$, i.e. $\|e^{tA} - I - tA\| = o(t)$, ou encore $\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{e^{tA} - e^0}{t} - A \right\| = 0$, ce qui est exactement dire que l'application e_A est dérivable en $t = 0$, de dérivée $e'_A(0) = A$.

3.3. On en déduit que $e'_A(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{(s+t)A} - e^{tA}}{s} = \left(\lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{sA} - e^0}{s} \right) \cdot e^{tA} = A \cdot e^{tA}$, donc e_A est

bien dérivable en tout t , de dérivée $e'_A : t \mapsto A \cdot e^{tA}$.

3.4. Il en résulte que $\forall \vec{Z} \in \mathbb{R}^n$, l'application $X : t \mapsto \overrightarrow{X}(t) = e_A(t) \cdot \vec{Z}$, qui a pour dérivée l'application $X' : t \mapsto \overrightarrow{X}'(t) = A \cdot e_A(t) \cdot \vec{Z} = A \cdot \overrightarrow{X}(t)$, satisfait donc bien pour tout t l'équation différentielle $\overrightarrow{X}'(t) = A \cdot \overrightarrow{X}(t)$, avec de plus la condition initiale en 0 : $\overrightarrow{X}(0) = e^0 \cdot \vec{Z} = \vec{Z}$.

4. On a $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, d'où le tableau de variation de f :

x		0	1	+	$+\infty$
$f'(x)$		1	+	0	-
$f(x)$		1	\nearrow	$1 + \frac{1}{e}$	\searrow
					1

Un graphe sommaire s'en déduit immédiatement, qu'on peut préciser en remarquant qu'il admet un unique point d'inflexion en $x = 2$, puisque $f''(x) = (x-2)e^{-x}$. Comme f est décroissante sur $[1, 2]$, avec $f(1) = 1 + \frac{1}{e} \in [1, 2]$ et $f(2) = 1 + \frac{2}{e^2} \in [1, 2]$, f applique bien $[1, 2]$ dans lui-même; comme $f'(1) = 0$ et $f'(2) = -\frac{1}{e^2} \in [-1, 0]$, avec f' décroissante sur $[1, 2]$, on obtient que $|f'(x)|$ est majorée par $\frac{1}{e^2} < 1$ pour $x \in [1, 2]$, donc, d'après la formule des accroissements finis, que $\forall x \in [1, 2], \forall y \in [1, 2], |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{e^2} |x - y|$, i.e. que f est contractante de rapport $\frac{1}{e^2}$ sur l'intervalle fermé $[1, 2]$. Il en résulte, d'après le théorème du point fixe, l'existence d'un unique point fixe ξ de f dans $[1, 2]$, i.e. $\xi \in [1, 2]$ tel que $1 + \xi e^{-\xi} = \xi$. Un algorithme de calcul de ξ consiste à prendre par exemple $x_0 = 1$ et à définir par la relation de récurrence $x_{k+1} = f(x_k)$ la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, dont ξ est la limite (on peut démontrer par exemple que x_{10} est une valeur approchée de ξ à 10^{-4} près).

5. La forme quadratique $\|\varphi\|^2 : \vec{x} \mapsto \|\varphi(\vec{x})\|^2 = (x+2y)^2 + y^2$ (si $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$) est continue de \mathbb{R}^2

dans \mathbb{R} , par exemple comme composée d'une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans lui-même par l'application $\vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|^2$, et le cercle-unité de \mathbb{R}^2 est un compact (fermé comme image réciproque de $\{1\}$ par l'application $\vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|^2$, et borné), donc elle est bornée et atteint ses bornes sur le cercle-unité. Avec $x = \cos \theta, y = \sin \theta$, on obtient : $\|\varphi(\vec{x})\|^2 = (x+2y)^2 + y^2 = \cos^2 \theta + 4 \cos \theta \sin \theta + 4 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 + 4 \sin^2 \theta + 4 \cos \theta \sin \theta = 3 - 2 \cos 2\theta + 2 \sin 2\theta = 3 + 2(\sin 2\theta - \cos 2\theta) = 3 + 2\sqrt{2} \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right)$. Il en résulte, le sinus prenant toutes les valeurs possibles entre -1 et 1 , que les bornes cherchées sont $3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$ (ce qui pour $\vec{x} \mapsto \|\varphi(\vec{x})\|$, correspond à $-1 + \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$).