

Examen final du 28 juin 2002

1. (5 points) Étudier la courbe paramétrée plane : $x(t) = t - t^3$, $y(t) = 1 - t^2$ (éléments de symétrie, branches infinies, point double (indication : $t = \pm 1$) et tangentes au point double, tableau de variations, points à tangente horizontale et points à tangente verticale, tracé sommaire).

2. (6 points) Soit γ l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 définie par $\overrightarrow{\gamma(t)} = \begin{bmatrix} t + \sin t - 4 \sin \frac{t}{2} \\ 3 + \cos t - 4 \cos \frac{t}{2} \end{bmatrix}$. Vérifier

que $\overrightarrow{\gamma'(t)} = \begin{bmatrix} -2 \cos \frac{t}{2} \left(1 - \cos \frac{t}{2}\right) \\ 2 \sin \frac{t}{2} \left(1 - \cos \frac{t}{2}\right) \end{bmatrix}$ et en déduire le calcul de la longueur $s(t)$ de l'arc de courbe

$\gamma([0, t])$. Donner les vecteurs unitaires tangent \vec{t} et normal \vec{n} à la courbe $Im(\gamma)$ au point $M(t)$ défini par $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{\gamma(t)}$. Calculer la courbure K_t et le rayon de courbure R_t en $M(t)$ à $Im(\gamma)$ et donner les coordonnées du centre de courbure $\Omega(t)$ en $M(t)$ sur $Im(\gamma)$. Montrer que la développée de $Im(\gamma)$ (c'est-à-dire l'ensemble des $\Omega(t)$, lorsque t parcourt \mathbb{R}) admet un point de rebroussement de première espèce en tout $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. (4 points) Déterminer les extrema dans \mathbb{R}^2 de la fonction f définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3 + y^3$.

4. (4 points) Soit S la surface de \mathbb{R}^3 d'équation $z = f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$. Donner l'équation du plan affine T tangent à S et la position de S par rapport à T en chacun des points $(1, 1, 2)$ et $(1, 0, -1)$.

5. (6 points) Soit le système différentiel à coefficients constants :

$$\begin{cases} x' &= -3x + y + 1 \\ y' &= x - 3y + 5 \end{cases}$$

Donner la solution générale du système homogène associé. On pourra pour cela vérifier que

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

et en déduire l'expression de $\exp\left(t \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\right)$. Montrer que le système avec second membre admet une solution particulière constante (i.e. un point stationnaire) que l'on déterminera. En déduire la solution générale du système complet (=avec second membre), puis la solution du système complet qui satisfait à la condition initiale $x(0) = -1$, $y(0) = 1$.