

Examen final du 29 juin 2001

1. (8 points) Étudier la courbe paramétrée plane : $x(t) = \frac{(1+t)(1-t^2)}{1+t^2}$, $y(t) = \frac{(1-t)(1-t^2)}{1+t^2}$: éléments de symétrie (vérifier que $x(-t) = y(t)$ et $y(-t) = x(t)$ et en déduire que la première bissectrice est axe de symétrie pour la courbe), tableau de variations (N.B. : on notera α la seule racine réelle -elle est comprise entre 0 et 1- du polynôme $1 - 5t + t^2 - t^3$), branches infinies (existence d'une asymptote oblique), point double (indication : $t = \pm 1$) et tangentes au point double, intersections avec l'axe de symétrie et tangentes en ces points, tracé.

2. (4 points) Développée de l'hyperbole équilatère : $x^2 - y^2 = 1$ (on pourra utiliser la paramétrisation : $x = \text{cht}$, $y = \text{sht}$). Donner les coordonnées du centre de courbure de l'hyperbole en son sommet (= l'un de ses deux sommets) ($x = 1, y = 0$) et vérifier que c'est un point de rebroussement de la développée. Quel est le comportement à l'infini de la développée? (i.e. que peut-on dire de ses branches infinies?)

3. (4 points) Déterminer les extrema dans \mathbb{R}^2 de la fonction f définie par $f(x, y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$. (On vérifiera que la condition $\overrightarrow{\nabla}_{x,y} f = \vec{0}$ équivaut à $x-y = x^3$ et $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0$; pour l'étude en $(0, 0)$, on pourra montrer que pour x non nul mais voisin de 0, on a $f(x, x) > 0$, mais $f(x, -x) < 0$.)

4. (4 points) Soit (Γ) la courbe de \mathbb{R}^3 définie par l'intersection des deux surfaces : $(S) = \{(X, Y, Z) / F(X, Y, Z) = XY - Z = 0\}$ et $(S') = \{(X, Y, Z) / G(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 - 1 = 0\}$. En un point quelconque $M(X, Y, Z)$ de (Γ) , donner les équations des plans affines tangents $M + T_M S$ à (S) et $M + T_M S'$ à (S') .

On rappelle que ces plans ont pour vecteurs normaux respectivement $\overrightarrow{\nabla}_M F$ et $\overrightarrow{\nabla}_M G$, et que donc un vecteur tangent à (Γ) , qui est à la fois tangent à (S) et à (S') , est à la fois orthogonal à $\overrightarrow{\nabla}_M F$ et à $\overrightarrow{\nabla}_M G$. En déduire que la tangente $T_M \Gamma$ à (Γ) en M est dirigée par le produit vectoriel $\overrightarrow{\nabla}_M F \wedge \overrightarrow{\nabla}_M G$, que l'on calculera; ceci n'est bien sûr possible que si ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (i.e. que si les plans tangents $T_M S$ et $T_M S'$ ne sont pas confondus): vérifier que ce n'est ici jamais le cas, et que ce produit vectoriel définit bien toujours une direction de droite.

En utilisant la paramétrisation par cosinus et sinus du cercle-unité, montrer que (Γ) admet pour paramétrisation $(x = \cos t, y = \sin t, z = \frac{1}{2} \sin 2t)$ et retrouver l'expression du vecteur tangent à (Γ) .

5. (6 points) Soit le système différentiel à coefficients constants :

$$\begin{cases} x' &= -3x + y + e^{-t} \\ y' &= x - 3y + e^{-t} + 4 \end{cases}$$

Donner la solution générale du système homogène associé. Montrer que le système avec second membre admet une solution particulière de la forme : $x_1(t) = a + be^{-t}$, $y_1(t) = c + de^{-t}$ (i.e. déterminer a, b, c, d répondant à la question). En déduire la solution générale du système complet (=avec second membre), puis la solution du système complet qui satisfait à la condition initiale $x(0) = \frac{5}{2}$, $y(0) = \frac{11}{2}$. Que peut-on dire du comportement des trajectoires solutions lorsque $t \rightarrow +\infty$?