Examen partiel du 17 décembre 1998

1. (2 points) Dans $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, anneau des classes résiduelles modulo 5, donner la table de l'addition et celle de la multiplication ; peut-on décider au vu de ces tables si $\mathbb{F}_5$ est un corps ?

2. (4 points) Soit F l'ensemble des polynômes de degré ≤ 3 qui s'annulent en 0 et en 1 :
$F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ d^\circ P \leq 3,\ P(0) = 0,\ P(1) = 0\}$.
a/ Montrer que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
b/ Montrer que tout vecteur de F est un polynôme de la forme $a_1X + a_2X^2 - (a_1 + a_2)X^3$, et en déduire que $\{X - X^3, X^2 - X^3\}$ est un système générateur de F .
c/ Montrer que $\{X - X^3, X^2 - X^3\}$ est en fait une base de F, et en déduire la dimension de F.

3. (4 points) Montrer que le système de vecteurs $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{R}$ et calculer les coordonnées du vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dans cette base.

4. (8 points) a/ Soient dans $E = \mathbb{R}^3$ les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Montrer que $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer dans cette base les coordonnées de $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

b/ Soient $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, et soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$\varphi(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{u}$, $\varphi(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{v}$, $\varphi(\overrightarrow{c}) = \overrightarrow{w}$. Déterminer les coordonnées de $\varphi(\overrightarrow{x})$:

- d'abord dans la base canonique $\left\{ \overrightarrow{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$;
- puis dans la base $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$.

c/ Vérifier que $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$; en déduire que $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} \in Ker\varphi$.
d/ Montrer que $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une base de $Im\varphi$; en déduire la dimension de $Ker\varphi$ et en donner une base (on rappelle que $rg(\varphi) = \dim E - \dim Ker\varphi$).

5. (6 points) Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré ≤ 4 ; en donner une base et la dimension. On considère dans E les vecteurs : X, $X(X-1)$, $X(X-1)(X-2)$, $X(X-1)(X-2)(X-3)$. Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ? On notera V le sous-espace vectoriel de E qu'ils engendrent. Quelle est sa dimension ?
Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\varphi(P) = P(0)$. Montrer que φ est surjective, et donc de rang 1 (indication : les polynômes constants font partie de E); quelle est la dimension de $Ker\varphi$? Montrer que $V \subset Ker\varphi$ et en déduire que $Ker\varphi = V$.

Corrigé de l'examen partiel d'algebre linéaire du 17 décembre 1998

1. Les tables demandées sont :

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

et

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

On constate sur ces tables que, en admettant l'associativité des lois $+$ et $\times$ dans $\mathbb{F}_5$, que ($\mathbb{F}_5$, +) est un groupe commutatif (élément neutre $\overline{0}$) et que ($\mathbb{F}_5^*$, $\times$) est également un groupe commutatif (élément neutre $\overline{1}$), puisque tout élément non nul a un inverse : $\overline{1}\times\overline{1}=\overline{1}$, $\overline{2}\times\overline{3}=\overline{1}$, $\overline{3}\times\overline{2}=\overline{1}$, $\overline{4}\times\overline{4}=\overline{1}$. Il resterait donc encore à vérifier que les lois $+$ et $\times$ sont associatives, et $\times$ distributive sur $+$ (ce qui résulte de ces propriétés pour $+$ et $\times$ dans $\mathbb{Z}$) pour obtenir que $\mathbb{F}_5$ est bien un corps, d'ailleurs commutatif.

2. a/ Soient P et Q des vecteurs (polynômes) de F, et soient λ et μ des réels quelconques. Il faut vérifier que $\lambda\,P\,+\,\mu\,Q$ sont aussi dans F. D'abord (avec la convention $d^o 0=-\infty$), $d^o\lambda P\le d^o P\le 3$, $d^o\mu Q\le d^o Q\le 3$, et $d^o(\lambda P+\mu Q)\le\max(d^o p, d^o Q)\le 3$; ensuite $(\lambda P+\mu Q)(0)=\lambda P(0)+\mu Q(0)=0$ et $(\lambda P+\mu Q)(1)=\lambda P(1)+\mu Q(1)=0$, donc $\lambda P+\mu Q$ est bien un élément de F. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, et donc bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
b/ Tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ s'écrit : $P=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3$, avec a_0, a_1, a_2, a_3 réels quelconques ; si $P\in F$, on a de plus : $P(0)=0$ et $P(1)=0$, soit $a_0=0$ et $a_0+a_1+a_2+a_3=0$, soit encore $P=a_1X+a_2X^2-(a_1+a_2)X^3=a_1(X-X^2)+a_2(X^2-X^3)$, avec a_1 et a_2 quelconques : F est donc l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels de $X-X^3$ et X^2-X^3. Ces deux polynômes forment donc bien un système générateur de F.
c/ Pour montrer que $\{X-X^3,\ X^2-X^3\}$ est une base de F, il suffit donc de montrer que c'est un système libre. Or si $\lambda(X-X^3)+\mu(X^2-X^3)=0$, en faisant $X=-1$, on obtient $2\mu=0$, et en faisant par exemple $X=2$, $-6\lambda-4\mu=0$, d'où $\lambda=\mu=0$: $\{X-X^3,\ X^2-X^3\}$ est donc bien une base de F, qui est ainsi de dimension 2.

3. Il suffit de montrer que le système est de rang 4 ; or

$$rg\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right)=rg\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-3\\-4\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\\-2\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right)=rg\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\\-2\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-3\\-4\\-3\end{bmatrix}\right)$$

$$=rg\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-4\\0\end{bmatrix}\right)=rg\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\4\end{bmatrix}\right)=4$$ car ce dernier système est échelonné : une combinaison linéaire nulle de ces 4 vecteurs est à coefficients tous nuls car :

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\-1\end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix}0\\0\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$ implique immédiatement $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$.

Ce système de 4 vecteurs est donc libre dans un espace vectoriel de dimension 4 : c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{R}$. Pour calculer dans cette base les coordonnées du vecteur $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$, il faut résoudre le système en (x,y,z,t) : $x\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, soit : $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}x&+&y&+&z&&&=&1\\2x&-&y&&&+&t&=&0\\3x&-&y&+&z&&&=&0\\4x&+&y&&&+&t&=&0\end{array}\right.$

On en tire : $2x-2y=-1$ (3[e] ligne - 1[e] ligne) et $2x+2y=0$ (4[e] ligne - 2[e] ligne), d'où $x=-\frac{1}{4}$ et $y=\frac{1}{4}$. On en déduit immédiatement, en reportant ces valeurs de x et y dans les 1[e] et 4[e] lignes, que $z=1$ et $t=\frac{3}{4}$, d'où : $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\frac{3}{4}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$.

4. a/ Comme dans l'exercice précédent, calculons le rang du système $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$:
$rg\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=rg\left(\vec{a},\vec{b}-3\vec{a},\vec{c}\right)=rg\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)=rg\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}\right)=3$, car ce dernier système est échelonné (même argument qu'à l'exercice précédent). Il en résulte que le système $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$, libre dans $\mathbb{R}^3$, en est une base. Pour calculer les coordonnées de $\vec{x}$ dans cette base, il faut déterminer α,β,γ, réels, tels que :
$\vec{x}=\begin{bmatrix}-5\\2\\-1\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, soit : $\left\{\begin{array}{lllllll}\alpha&+&3\beta&&&=&-5\\\alpha&+&2\beta&+&\gamma&=&2\\\alpha&+&\beta&+&\gamma&=&-1\end{array}\right.$
On en tire immédiatement : $\beta=3$, d'où $\alpha=-14$, et enfin $\gamma=10$, soit $\vec{x}=-14\vec{a}+3\vec{b}+10\vec{c}$.
b/ Par linéarité, on a : $\varphi(\vec{x})=-14\varphi(\vec{a})+3\varphi(\vec{b})+10\varphi(\vec{c})=-14\vec{u}+3\vec{v}+10\vec{w}$, soit :
$\varphi(\vec{x})=\begin{bmatrix}-11\\7\\4\end{bmatrix}=-11\vec{i}+7\vec{j}+4\vec{k}$. Et pour trouver les coordonnées α,β,γ de $\varphi(\vec{x})$ dans la base $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ de $\mathbb{R}^3$, il faut donc résoudre l'équation en (α,β,γ) : $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=-11\vec{i}+7\vec{j}+4\vec{k}$,
soit : $\left\{\begin{array}{llllll}\alpha+&3\beta&&&=&-11\\\alpha+&2\beta&+&\gamma&=&7\\\alpha+&\beta&+&\gamma&=&4\end{array}\right.$. On trouve $\beta=3$, $\alpha=-20$, $\gamma=21$, soit $\varphi(\vec{x})=-20\vec{a}+3\vec{b}+21\vec{c}$.
c/ On vérifie sans peine que $\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}$, c'est-à-dire $\varphi(\vec{a})-\varphi(\vec{b})-\varphi(\vec{c})=\vec{0}$, i.e. $\varphi(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})=\vec{0}$, i.e. $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\in Ker\varphi$.
d/ Comme $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ est l'image par φ de la base $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ de $\mathbb{R}^3$, Im φ = Vect $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ = Vect $(\vec{u},\vec{v})$ puisque $\vec{w}=\vec{u}-\vec{v}$. Or $\{\vec{u},\vec{v}\}$ est libre, puisque si $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=\vec{0}$, on a $\lambda=0$ et $\mu=0$ (3[e] et 2[e] coordonnées de $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$). Donc $\{\vec{u},\vec{v}\}$ est une base de Im φ, et $rg\varphi=2$. Et comme $\dim Ker\varphi=\dim E-rg\varphi=3-2=1$, $Ker\varphi$ est de dimension 1 ; on en connaît un vecteur non nul : $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, d'après le c/ ; donc $\left\{\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$ est une base de $Ker\varphi$.

5. On sait que $E=\mathbb{R}_4[X]$ a pour base (canonique) $\{1,X,X^2,X^3,X^4\}$ et que E est ainsi de dimension 5. Cherchons si les quatre polynômes X, $X(X-1)$, $X(X-1)(X-2)$ et $X(X-1)(X-2)(X-3)$ forment ou non une famille libre de vecteurs de E : soient donc α, β, γ et δ quatre scalaires réels tels que : $\alpha X+\beta X(X-1)+\gamma X(X-1)(X-2)+\delta X(X-1)(X-2)(X-3)=0$. En faisant $X=1$, on a $\alpha=0$; en faisant $X=2$, $2\alpha+2\beta=0$, d'où $\beta=0$; en faisant $X=3$, $3\alpha+6\beta+6\gamma=0$, d'où $\gamma=0$; enfin en faisant par exemple $X=4$ et en tenant compte de $\alpha=\beta=\gamma=0$, on a $24\delta=0$, d'où $\delta=0$. Le système de vecteurs $\{X,X(X-1),X(X-1)(X-2),X(X-1)(X-2)(X-3)\}$ est donc libre dans E et le sous-espace V =Vect $(X,X(X-1),X(X-1)(X-2),X(X-1)(X-2)(X-3))$ est donc de dimension 4. Tout polynôme constant $a_0=a_0\,.\,1$ de E a pour image par φ le nombre a_0 dans $\mathbb{R}$; donc pour tout réel y de $\mathbb{R}$, on peut prendre pour antécédent de y par φ le polynôme constant $y=y\,.\,1$ de E : donc l'application linéaire φ est bien surjective de E dans $\mathbb{R}$, et $rg\varphi=\dim$ Im $\varphi=\dim\mathbb{R}=1$. D'où : $\dim Ker\varphi=\dim E-rg\varphi=5-1=4$. Or V est inclus dans $Ker\varphi$, car pour tout polynôme $P=aX+bX(X-1)+cX(X-1)(X-2)+dX(X-1)(X-2)(X-3)$ de V, X est en facteur dans P, et on a $P(0)=0$, c'est-à-dire $\varphi(P)=0$. Il en résulte que V est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $Ker\varphi$; or il a même dimension que lui : donc ils sont égaux, i.e. $Ker\varphi=V$.