

Examen partiel du 16 décembre 2003

**1. (6 points)** a/ Montrer que l'application  $\varphi : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}, \times)$  définie par  $\varphi(x) = e^{2\pi i x}$  est un morphisme de groupes commutatifs.

b/ Quel est son noyau? (i.e. quelle est la partie de  $\mathbb{R} : \{x \in \mathbb{R} / \varphi(x) = 1\}$ ?). Montrer que l'image de  $\varphi$  est l'ensemble  $\mathbb{U}$  des nombres complexes de module 1.

c/ Montrer que, pour  $a \in \mathbb{R}$  fixé, le sous-groupe  $(\varphi(a))$  de  $(\mathbb{U}, \times)$  engendré par  $\varphi(a)$  est fini si et seulement si  $a \in \mathbb{Q}$ .

**2. (4 points)** Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  muni de sa base canonique  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ,

on considère les vecteurs  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ . Montrer que  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$

est une base de  $\mathbb{R}^4$  et exprimer dans cette base le vecteur de coordonnées  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  dans la base canonique.

(Indication pour montrer que le système  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$  est libre : déduire du système d'équations initial des équations obtenues par des sommes et des différences entre les lignes ; on pourra aussi, si l'on préfère, calculer le rang du système de vecteurs.)

**3. (4 points)** Soit  $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  (munis de leurs bases canoniques respectives) l'application définie par  $\varphi \left( \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x + y + z \\ x + 2y + 3z \end{bmatrix}$ . Montrer que  $\varphi$  est linéaire. Déterminer  $\text{Ker} \varphi$ , en donner une base et la dimension. En déduire que  $\varphi$  est surjective.

**4. (4 points)** a/ Montrer que dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_2[X]$  des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, les polynômes  $P = X(X - 1)$ ,  $Q = X(X + 1)$  et  $R = (X - 1)(X + 1)$  forment une base de  $E$ . Exprimer les polynômes 1,  $X$  et  $X^2$  dans cette base.

b/ Soit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  défini par  $\varphi(1) = P$ ,  $\varphi(X) = Q$ ,  $\varphi(X^2) = R$ . Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme et déterminer son isomorphisme inverse  $\psi$  (i.e. l'endomorphisme  $\psi$  tel que  $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$ ) en calculant  $\psi(1)$ ,  $\psi(X)$ ,  $\psi(X^2)$ . (Utiliser l'expression de 1,  $X$ ,  $X^2$  trouvée au a/.)

**5. (6 points)** a/ Montrer que dans l'espace vectoriel  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , la famille  $\left\{ 1, \exp, \frac{1}{\exp} \right\}$  est libre (où  $1 : x \mapsto 1$ ,  $\exp : x \mapsto e^x$ ,  $\frac{1}{\exp} : x \mapsto e^{-x}$ ).

b/ Montrer que, plus généralement, la famille  $\left\{ 1, \exp, \frac{1}{\exp}, (\exp)^2, \frac{1}{(\exp)^2}, \dots, (\exp)^n, \frac{1}{(\exp)^n} \right\}$  est, pour tout  $n \geq 1$ , libre dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . (Indication : par récurrence sur  $n$  : si la propriété est vraie

jusqu'au rang  $n$ , considérer une relation de dépendance linéaire :  $\alpha e^{(n+1)x} + \beta e^{-(n+1)x} = \sum_{k=-n}^{k=n} \lambda_k e^{kx}$  et

montrer que  $\alpha = \beta = 0$  en : a/ multipliant les deux membres de cette égalité par  $e^{-(n+1)x}$  et en faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$  ; b/ multipliant les deux membres de cette égalité par  $e^{(n+1)x}$  et en faisant tendre  $x$  vers  $-\infty$ . En déduire le résultat, en utilisant l'hypothèse de récurrence.)

Corrigé de l'examen partiel du 16 décembre 2003

1. a/ On a :  $\varphi(0) = e^0 = 1$ ,  $\varphi(x+y) = e^{2\pi i(x+y)} = e^{2\pi i x} \cdot e^{2\pi i y}$  et  $e^{2\pi i(-x)} = (e^{2\pi i x})^{-1}$ , donc  $\varphi$  est bien un morphisme entre les groupes commutatifs  $(\mathbb{R}, +)$  et  $(\mathbb{C}, \times)$ .

b/  $\text{Ker}\varphi = \{x \in \mathbb{R} / e^{2\pi i x} = 1\} = \mathbb{Z}$  (car l'argument de 1 est  $0 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ). D'autre part,  $\varphi$  est clairement à valeurs dans  $\mathbb{U}$  et inversement tout nombre complexe de module 1 s'écrit  $e^{i\theta}$ , donc en posant  $x = \frac{\theta}{2\pi}$ , on voit que tout élément de  $\mathbb{U}$  est l'image d'un  $x$  de  $\mathbb{R}$  par  $\varphi$ , donc que  $\text{Im}\varphi = \mathbb{U}$ .

c/  $(\varphi(a))^n = \{\varphi(a)^n, n \in \mathbb{Z}\} = \{\varphi(na), n \in \mathbb{Z}\}$ . Si  $a \in \mathbb{Q}$ ,  $a = \frac{p}{q}$ , avec  $p$  et  $q$  entiers, donc  $\varphi(qa) = e^{2\pi i q a} = 1$  et pour tout  $n = pq + r$  (division de  $n$  par  $q$ , de reste  $r < q$ ),  $\varphi(na) = [\varphi(qa)]^p \cdot \varphi(ra)$  sera l'un des  $\varphi(ra)$ ,  $0 \leq r < q$ , en nombre fini. Inversement, si  $(\varphi(a))$  est un sous-groupe fini de  $\mathbb{U}$  de cardinal  $c$ , pour tout  $n$ ,  $\varphi(na)$  est l'un des  $\varphi(n_1 a), \dots, \varphi(n_c a)$ , donc il existe  $n$  et  $n_i$  distincts dans  $\mathbb{Z}$  tels que  $\varphi(na) = \varphi(n_i a)$ , i.e.  $\varphi((n - n_i)a) = 1$ , donc un  $q = n - n_i$  de  $\mathbb{Z}^*$  tel que  $qa \in \mathbb{Z}$ , donc  $a \in \mathbb{Q}$ .

2. Soit une combinaison linéaire nulle des vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x} : \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{w} + \xi \vec{x} = \vec{0}$ , i.e.

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu + 3\nu + 4\xi = 0 & (1) \\ 2\lambda + 3\mu + 4\nu + \xi = 0 & (2) \\ 3\lambda + 4\mu + \nu + 2\xi = 0 & (3) \\ 4\lambda + \mu + 2\nu + 3\xi = 0 & (4) \end{cases} \text{ . En calculant (1) + (3) et (2) + (4), (1) - (3) et (2) - (4), on a :}$$

$$\begin{cases} 2\lambda + 3\mu + 2\nu + 3\xi = 0 & (1) + (3) \\ 3\lambda + 2\mu + 3\nu + 2\xi = 0 & (2) + (4) \\ -\lambda - \mu + \nu + \xi = 0 & (1) - (3) \\ -\lambda + \mu + \nu - \xi = 0 & (2) - (4) \end{cases} \text{ . De (1)-(3) et (2)-(4) on tire } \lambda + \mu = \nu + \xi \text{ et } \lambda - \mu = \nu - \xi$$

soit  $\lambda = \nu$ ,  $\mu = \xi$  (en faisant la somme et la différence). En reportant ces valeurs dans (1) + (3) et (2) + (4), on obtient  $4\lambda + 6\mu = 0$  et  $6\lambda + 4\mu = 0$ , d'où (par somme et différence)  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 0$ , donc  $\nu = 0$ ,  $\xi = 0$ . Il en résulte que le système de quatre vecteurs  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$  est libre dans  $\mathbb{R}^4$ , donc qu'il en constitue une base. En calculant la somme  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{x}$  dans la base canonique, on obtient

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ donc } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \vec{u} + \frac{1}{10} \vec{v} + \frac{1}{10} \vec{w} + \frac{1}{10} \vec{x}.$$

N.B. : Autre façon de procéder pour démontrer que  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$  est un système libre : calculer son rang en utilisant un théorème du cours pour le transformer en un système échelonné :

$$\begin{aligned} \text{rg} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) &= \text{rg} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \\ -10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ -10 \\ -9 \end{bmatrix} \right) = \text{rg} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 40 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rg} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 40 - \frac{4}{6} \cdot 4 \end{bmatrix} \right) = 4, \text{ puisque les coefficients } \lambda, \mu, \nu, \xi \text{ d'une combinaison linéaire} \end{aligned}$$

nulle d'un tel système seront (de proche en proche :  $\lambda = 0$ , puis  $2\lambda - \mu = 0$ , d'où  $\mu = 0$ , etc.) tous nuls.

3. On vérifie sans peine que  $\varphi \left( \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \lambda' \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \right) = \lambda \varphi \left( \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) + \lambda' \varphi \left( \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \right)$ , donc que  $\varphi$  est bien linéaire.  $\text{Ker}\varphi$  est l'ensemble des  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  de  $\mathbb{R}^3$  tels que  $x + y + z = 0$  et  $x + 2y + 3z = 0$ , ce

qu'on peut écrire :  $z = -x - y$  et  $x + 2y - 3x - 3y = 0$ , soit  $y = -2x$  et  $z = x$ . Donc  $\text{Ker}\varphi$  est l'ensemble des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  de la forme  $\begin{bmatrix} x \\ -2x \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , où  $x$  est quelconque, donc  $\text{Ker}\varphi = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Une base de  $\text{Ker}\varphi$  est donc constituée du seul vecteur  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , et  $\text{Ker}\varphi$  est de dimension 1 (c'est une droite vectorielle). Comme  $\text{rg}(\varphi) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker}\varphi = 2$ ,  $\varphi$  est de rang maximum 2, donc est surjective.

4. a/  $\mathbb{R}_2[X]$ , dont une base est constitué par les monômes  $1, X$  et  $X^2$ , est un espace vectoriel de dimension 3 sur  $\mathbb{R}$  (pour retrouver -ce qu'on ne demande pas de démontrer- que  $\{1, X, X^2\}$  en est une base, remarquer que c'en est par définition un système générateur ; et que si  $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot X + \gamma \cdot X^2 = 0$ , en faisant  $X = 0$ , on obtient  $\alpha = 0$ , et en faisant  $X = 1$ , puis  $X = -1$ , que  $\beta + \gamma = 0$  et  $-\beta + \gamma = 0$ , d'où  $\beta = \gamma = 0$ , donc  $\{1, X, X^2\}$  est aussi libre dans  $\mathbb{R}_2[X]$ ). Donc pour démontrer que le système des trois vecteurs  $\{P, Q, R\}$  est aussi une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  (de dimension 3), il suffit de démontrer que ce système est libre. Or si  $\lambda P + \mu Q + \nu R = 0$ , i.e. si  $\lambda X(X - 1) + \mu X(X + 1) + \nu(X - 1)(X + 1) = 0$ , en faisant successivement  $X = -1, X = 1$ , et  $X = 0$ , on obtient que  $\lambda = \mu = \nu = 0$ . Donc  $\{P, Q, R\}$  est bien une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Cherchons à exprimer  $1, X$  et  $X^2$  dans cette base :  $1 = u_1 \cdot P + v_1 \cdot Q + w_1 \cdot R$ , i.e.  $1 = u_1 X(X - 1) + v_1 X(X + 1) + w_1(X - 1)(X + 1)$  donne, en faisant successivement  $X = -1, X = 1$ , et  $X = 0$  :  $u_1 = \frac{1}{2}, v_1 = \frac{1}{2}$  et  $w_1 = -1$ , soit  $1 = \frac{1}{2} \cdot P + \frac{1}{2} \cdot Q - 1 \cdot R$  ; on obtient de même :  $X = -\frac{1}{2} \cdot P + \frac{1}{2} \cdot Q$  et  $X^2 = \frac{1}{2} \cdot P + \frac{1}{2} \cdot Q$ .

b/ La définition du texte donne clairement lieu à un et un seul endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{R}_2[X]$ , qui sera bijectif si et seulement s'il est injectif. Or il transforme le système libre  $\{1, X, X^2\}$  en un autre système libre :  $\{P, Q, R\}$ , d'où l'injectivité (ou encore :  $\varphi$  sera bijectif si et seulement s'il est surjectif ; or  $\dim \text{Im}\varphi = \text{rg}\varphi = \text{rg}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)) = \text{rg}(P, Q, R) = 3$ , d'où la surjectivité). Donc  $\varphi$  est bien un isomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Son isomorphisme inverse  $\psi$  sera déterminé par son image sur les vecteurs de base  $1, X$  et  $X^2$  : or d'après le a/,  $\psi(1) = \psi\left(\frac{1}{2} \cdot P + \frac{1}{2} \cdot Q - 1 \cdot R\right) = \psi\left(\frac{1}{2} \cdot \varphi(1) + \frac{1}{2} \cdot \varphi(X) - 1 \cdot \varphi(X^2)\right) = \frac{1}{2} \cdot \psi \circ \varphi(1) + \frac{1}{2} \cdot \psi \circ \varphi(X) - 1 \cdot \psi \circ \varphi(X^2) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot X - 1 \cdot X^2$ , et, de même,  $\psi(X) = -\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot X$  et  $\psi(X^2) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot X$ , soit :  $\psi(1) = \frac{1}{2}(X + 1) - X^2, \psi(X) = \frac{1}{2}(X - 1), \psi(X^2) = \frac{1}{2}(X + 1)$ .

5. a/ Une combinaison linéaire nulle de ces 3 applications s'écrit :  $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda + \mu e^x + \nu e^{-x} = 0$ . En faisant  $x = 0$ , on a :  $\lambda + \mu + \nu = 0$  ; en faisant  $x = 1$ , puis  $x = -1$  :  $\lambda + \mu e + \frac{\nu}{e} = 0$ , puis  $\lambda + \frac{\mu}{e} + \nu e = 0$ . D'où,

par soustraction de la première égalité aux deux autres : 
$$\begin{cases} \mu(e - 1) + \nu \left(\frac{1}{e} - 1\right) = 0 \\ \mu \left(\frac{1}{e} - 1\right) + \nu(e - 1) = 0 \end{cases}, \text{ système}$$

linéaire dont le déterminant  $(e - 1)^2 \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$  est non nul, d'où  $\mu = \nu = 0$ , et donc  $\lambda = 0$ . Au lieu de ce calcul, on peut aussi utiliser l'indication du texte dans le b/ : dans l'égalité  $\lambda + \mu e^x + \nu e^{-x} = 0$ , multiplions par  $e^{-x}$  et faisons tendre  $x$  vers  $+\infty$  : on obtient  $\mu = 0$  ; multiplions par  $e^x$  et faisons tendre  $x$  vers  $-\infty$  : on obtient  $\nu = 0$  ; finalement, il ne reste que  $\lambda = 0$ . Il en résulte, quel que soit le procédé de calcul choisi, que la famille  $\left\{1, \exp, \frac{1}{\exp}\right\}$  est bien libre dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

b/ Par récurrence : la propriété est vraie pour  $n = 1$  d'après le a/. En la supposant vraie jusqu'en  $n$  et en procédant comme indiqué pour le rang  $n + 1$ , on obtient  $\alpha = \beta = 0$ , puis, comme  $\sum_{k=-n}^{k=n} \lambda_k e^{kx} = 0$ , et d'après l'hypothèse de récurrence, que tous les  $\lambda_k$  sont nuls. La propriété est donc aussi vraie en  $n + 1$  : donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , la famille  $\left\{1, \exp, \frac{1}{\exp}, (\exp)^2, \frac{1}{(\exp)^2}, \dots, (\exp)^n, \frac{1}{(\exp)^n}\right\}$  est libre dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .