UNIVERSITÉ PARIS VIII **Algèbre linéaire II**
DEUG LIT **1998-99**

Examen partiel du 13 avril 1999 (suivi de son corrigé)

1. (4 points) Montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible et calculer son inverse (par exemple par la méthode du pivot).

2. (6 points) Donner dans $\mathbb{R}^4 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\}$ des équations pour chacun des deux sous-espaces vectoriels : F, engendré par $\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, et G, engendré par $\overrightarrow{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Montrer que $F + G = \mathbb{R}^4$; donner des équations de $F \bigcap G$; en déduire une base et la dimension de $F \bigcap G$.

3. (8 points) Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\left\{ \overrightarrow{e_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{e_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, défini par $\varphi(\overrightarrow{e_1}) = -2\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$, $\varphi(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, et $\varphi(\overrightarrow{e_3}) = 3\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.

Donner la matrice A de φ dans la base canonique.

Montrer que, si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de passage P de la base canonique à la base $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$? Calculer son inverse P^{-1}.

Quelle est la matrice A' de φ dans la base $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$?

Calculer A'^n, pour $n \in \mathbb{N}$, et $e^{tA'}$, pour $t \in \mathbb{R}$, et en déduire A^n et e^{tA} (on rappelle que si $A' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix}$, alors $e^{tA'} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\nu t} \end{bmatrix}$, et que si $A = PA'P^{-1}$, alors $e^{tA} = Pe^{tA'}P^{-1}$).

4. (8 points)

a/ Résoudre le système en x_1, x_2, x_3 :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2^2x_2 & + & 3^2x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

b/ Résoudre de même le système en x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2^2x_2 & + & 3^2x_3 & + & 4^2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2^3x_2 & + & 3^3x_3 & + & 4^3x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

c/ Plus généralement, on se propose de résoudre le système en $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & \ldots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & \ldots & + & nx_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ x_1 & + & 2^{n-1}x_2 & + & \ldots & + & n^{n-1}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Est-ce un système de Cramer ? N.B. : on rappelle la valeur d'un déterminant de VanderMonde :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

.

Montrer que $\forall k (1 \leq k \leq n), x_k = (-1)^{k+1} C_k^n$, où $C_k^n = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

(On pourra montrer que, dans la formule de Cramer donnant x_k, en développant le déterminant du numérateur par rapport à la k^{e} colonne, en mettant en facteur le terme $(-1)^{k+1} \prod\limits_{i=1, i\neq k}^{n} i = (-1)^{k+1} \dfrac{n!}{k}$, on obtient un autre déterminant de VanderMonde, d'ordre $n-1$, où ne figure pas la colonne des k^j $(0 \leq j \leq n-2)$, déterminant dont la valeur est donc $(-1)^{k+1} \prod\limits_{1\leq j<i\leq n, i\neq k, j\neq k} (i-j)$, et on effectuera les simplifications qui s'imposent entre numérateur et dénominateur.)

Corrigé de l'examen partiel d'Algèbre Linéaire II du 13 avril 1999

1. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, donc A est inversible.

Calcul de A^{-1} :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrrrr} x & + & y & & & + & t & = & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & y & - & z & - & t & = & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & y & + & z & - & t & = & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x & + & y & + & & & t & = & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrrrrl} x & + & y & & & + & t & = & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & & y & - & z & - & t & = & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & & & & 2z & & & = & 0 & -1 & 1 & 0 & (\text{N.B. : } l_3 - l_2) \\ & & 2y & & & + & 2t & = & 1 & 0 & 0 & 1 & (\text{N.B. : } l_4 + l_1) \end{array} \right.$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrrrrl} x & + & y & & & + & t & = & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & & y & - & z & - & t & = & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & & & & z & & & = & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & \\ & & & & z & + & 2t & = & 1/2 & -1 & 0 & 1/2 & (\text{N.B. : } \frac{1}{2}(l_4 + l_1) - l_2) \end{array} \right.$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrrrr} x & + & y & & & + & t & = & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & y & - & z & - & t & = & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & z & & & = & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ & & & & & & t & = & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array} \right.$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrrrr} x & + & y & & & + & t & = & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & y & & & & & = & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ & & & & z & & & = & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ & & & & & & t & = & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array} \right.$$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcrrrr} x & & & & = & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ & y & & & = & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ & & z & & = & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ & & & t & = & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array} \right.$$

d'où enfin :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

2. Tout d'abord, le système $\left\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}\right\}$ est de rang maximal 4, car :

$$\det\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$, donc $F + G = \mathbb{R}^4$.

Soit $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$. Une équation de F est : $\det\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{u}\right) = 0$, soit :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ -1 & -1 & 0 & y \\ -1 & 1 & 0 & z \\ 1 & 0 & -1 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ -1 & -1 & 0 & y \\ -1 & 1 & 0 & z \\ 2 & 0 & 0 & x+t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & y \\ -1 & 1 & z \\ 2 & 0 & x+t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & y \\ -2 & 0 & y+z \\ 2 & 0 & x+t \end{vmatrix}$$

$= \begin{vmatrix} -2 & y+z \\ 2 & x+t \end{vmatrix} = -2(x+y+z+t) = 0$, i.e. une équation de F est : $x+y+z+t=0$.

De même, une équation de G est : $\det\left(\overrightarrow{d}, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}, \overrightarrow{u}\right) = 0$, soit :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \\ 1 & 0 & 0 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & z-x \\ 1 & 0 & 0 & t \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z-x \\ 1 & 0 & t \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z-x \\ 0 & -1 & t-y \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & z-x \\ -1 & t-y \end{vmatrix}$$

$= x+y-z-t = 0$, i.e. une équation de G est : $x+y-z-t=0$.

Des équations de $F \bigcap G$ sont donc :

$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & - & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$, soit : $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$, soit : $y = -x$ et $t = -z$,

avec x et z quelconques. Une base de $F \bigcap G$ est donc : $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$, et sa dimension est 2.

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, donc

$\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$, et $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Calcul de P^{-1} :

$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 & 0 & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 & 1 & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$, soit : $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 & 0 & 0 \\ x & - & 2y & & & = & -1 & 1 & 0 \\ & & 2y & + & 2z & = & 1 & 0 & 1 \end{array}\right.$, soit :

$\begin{cases} x + y + z = 1 \quad 0 \quad 0 \\ \quad y = \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \\ \quad z = 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \end{cases}$, soit encore : $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \\ z = 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \end{cases}$, et

$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (vérification : $PP^{-1} = I$).

$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

On en déduit que $A'^n = \begin{bmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{bmatrix}$ et que $e^{tA'} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix}$

d'où : $A^n = PA'^nP^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2^n+(-2)^n}{2} & \frac{4^n-2^n}{2} & \frac{4^n-(-2)^n}{2} \\ \frac{(-2)^n-2^n}{2} & \frac{4^n+2^n}{2} & \frac{4^n-(-2)^n}{2} \\ \frac{2^n-(-2)^n}{2} & \frac{4^n-2^n}{2} & \frac{4^n+(-2)^n}{2} \end{bmatrix}$$

et de même : $e^{tA} = Pe^{tA'}P^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2} & \frac{e^{4t}-e^{2t}}{2} & \frac{e^{4t}-e^{-2t}}{2} \\ \frac{e^{-2t}-e^{2t}}{2} & \frac{e^{4t}+e^{2t}}{2} & \frac{e^{4t}-e^{-2t}}{2} \\ \frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2} & \frac{e^{4t}-e^{2t}}{2} & \frac{e^{4t}+e^{-2t}}{2} \end{bmatrix}.$$

4. a/ On obtient, par combinaisons linéaires de lignes (en retranchant de chaque ligne, à partir de la 2e, la ligne précédente) : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$, soit : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_3 = 2 \end{cases}$,

soit : $(x_1, x_2, x_3) = (3, -3, 1)$

b/ On obtient de même ici : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_2 + 6x_3 + 12x_4 = 0 \\ 4x_2 + 18x_3 + 48x_4 = 0 \end{cases}$, soit :

$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_3 + 6x_4 = 2 \\ 6x_3 + 24x_4 = 0 \end{cases}$, soit : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_4 = -6 \end{cases}$, soit :

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, -6, 4, -1)$.

c/ À l'ordre n, le déterminant du système est le déterminant de VanderMonde : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}$

$= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (i-j) \neq 0$, puisque dans ce produit, on a toujours $i \neq j$. Donc le système est de Cramer.

Comme indiqué dans le texte, la formule de Cramer pour x_k s'écrit :

$$x_k = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & 0 & k+1 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \dots & (k-1)^{n-1} & 0 & (k+1)^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}}$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \dots & (k-1)^{n-1} & (k+1)^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}}$$

$$= (-1)^{k+1}.2.\dots.(k-1).(k+1).\dots.n \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^{n-2} & \dots & (k-1)^{n-2} & (k+1)^{n-2} & \dots & n^{n-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}}$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{n!}{k} \frac{\prod_{1 \le j < i \le n, i \neq k, j \neq k} (i-j)}{\prod_{1 \le j < i \le n} (i-j)} = \frac{(-1)^{k+1} n!}{k \prod_{1 \le j \le k-1} (k-j) \prod_{k+1 \le i \le n} (i-k)} = \frac{(-1)^{k+1} n!}{(k-1)! k (n-k)!}$$
$$= (-1)^{k+1} C_n^k.$$