Examen final du 4 février 1999

1. (4 points) Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les vecteurs $\overrightarrow{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Soient $E_1 = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{w})$. Calculer le rang des systèmes de vecteurs $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$, $\{\overrightarrow{t}, \overrightarrow{w}\}$, et $\{\overrightarrow{t}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$. Donner une base et la dimension de E_1, E_2, $E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2$.

(Indication pour $E_1 \cap E_2$: on pourra déterminer une équation de la forme $ax + by + cz = 0$ de E_1, puis de E_2, en déterminant a, b, c lorsque le vecteur $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ décrit une base de E_1, puis une base de E_2, et enfin résoudre le système $\begin{cases} ax + by + cz & = & 0 \\ a'x + b'y + c'z & = & 0 \end{cases}$ ainsi obtenu pour trouver une base de $E_1 \cap E_2$.)

2. (4 points) Montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible et calculer son inverse A^{-1}, par exemple par la méthode du pivot.

3. (4 points) Soient E, F, G trois espaces vectoriels et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications linéaires. On demande de montrer que : a/ si g est injective, alors rg $(g \circ f)$ = rg f ; b/ si f est surjective, alors rg $(g \circ f)$ = rg g. (N.B. On rappelle que g est injective si et seulement si pour tout F' sous-espace vectoriel de F, dim $(g(F'))$ = dim (F'), et que f est surjective si et seulement si Im(f) (=$f(E)$) = F.)

4. (4 points) Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $p(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}) = \dfrac{x+y+z}{3}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$, où $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que p est un projecteur (i.e. $p \circ p = p$). Donner la matrice de p dans la base canonique. Déterminer une base et la dimension de Im p et de Ker p.

5. (6 points) Soient les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $\begin{cases} x_{n+1} & = & 4x_n - y_n \\ y_{n+1} & = & -x_n + 4y_n \end{cases}$, où x_0 et y_0 sont deux réels fixés.

a/ On pose $X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n sous la forme $X_{n+1} = AX_n$, où A est une matrice à déterminer. Montrer par récurrence sur n que $X_n = A^n X_0$.

b/ Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui admet A pour matrice dans la base canonique ; donner la matrice A' de φ dans la base $\{\overrightarrow{u}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\}$ de $\mathbb{R}^2$ (vérifier que $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$).

c/ Calculer A'^n et en déduire A^n, puis X_n. On donne $x_0 = 1, y_0 = 1$: étudier le comportement de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'infini ; même question lorsque $x_0 = 1, y_0 = -1$.

6. (6 points) Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a/ Montrer que $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ et calculer son inverse P^{-1}.

b/ Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ est $A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Montrer que $A'^3 = 0$ et en déduire que $\varphi^3 (= \varphi \circ \varphi \circ \varphi)$ est l'endomorphisme nul. Exprimer la matrice A de φ dans la base canonique à l'aide de A' et P et la calculer explicitement. Montrer que $A^3 = 0$.

c/ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme γ_t de $\mathbb{R}^3$ défini par $\gamma_t = Id + t\varphi + \frac{1}{2}t^2\varphi^2$ (où $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$). Donner les matrices Γ_t et Γ'_t de γ_t dans les bases 1/ canonique, et 2/ $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$, respectivement. Montrer que $\forall s \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$, $\gamma_{s+t} = \gamma_s \circ \gamma_t$. Que vaut γ_0 ? Montrer que γ_t est pour tout t un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$, et que $\Gamma : t \mapsto \Gamma_t$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), \times)$.